

## **Esempi di interferenze costruttive tra matematica e fisica per il successo formativo nella scuola di base: la proporzionalità**

**E. Giordano – Paola Bonelli Majorino**

Università degli Studi di Milano-Bicocca

*Riassunto:* In questo lavoro verrà presentato un percorso per l'insegnamento/apprendimento della proporzionalità nella scuola secondaria di primo grado.

Secondo la recente terminologia di Confrey (2006) nostro obiettivo è tracciare “un corridoio” che evidenzia i punti fondamentali e le idee chiave relativamente a questo tema generale che possono servire di base per la costruzione di “traiettorie” didattiche particolari da realizzare nelle classi.

Il percorso deriva da precedenti lavori di ricerca-azione realizzati per anni in alcune classi-laboratorio in cui veniva sperimentato un insegnamento della fisica in “interferenza costruttiva” con l'insegnamento della matematica. Il percorso è stato proposto in diversi contesti ed è in via di ulteriore sperimentazione dalla SSIS al Master in Didattica delle Scienze.

### **Introduzione**

Da anni partecipiamo al gruppo nazionale di ricerca in didattica della fisica coordinato da P. Guidoni e portiamo avanti esperienze di ricerca in collaborazione tra universitari ed insegnanti-ricercatori. Negli ultimi anni tali esperienze sono state la base per gli insegnamenti in alcuni corsi e laboratori del Corso di laurea in Scienze della Formazione Primaria e della SSIS e, dallo scorso anno, anche del Master in didattica delle Scienze per insegnanti della scuola elementare e media. Particolare attenzione è sempre stata rivolta dai due autori ai rapporti tra insegnamento e apprendimento della matematica e della fisica e alle possibilità di “interferenza costruttiva” (Guidoni, 2006) tra i due insegnamenti senza mai ridurre semplicemente l'uno al servizio dell'altro, ma allo scopo di raggiungere apprendimenti profondi di qualità elevata in entrambe le discipline sul piano dei contenuti delle procedure e più in generale sul piano metacognitivo (Bonelli Majorino, Gagliardi, Giordano 2003).

Vogliamo qui proporre lo schema di un “corridoio”, sulla proporzionalità diretta costruito in questa prospettiva a partire dalle esperienze di insegnamento della prof.ssa Bonelli Majorino nelle sue classi e nei laboratori dei corsi universitari per la formazione iniziale, in collaborazione con la prof.ssa Giordano che ha seguito per anni sistematicamente le esperienze nelle classi di scuola media che sono alla base della proposta di formazione.

A partire da questo gli insegnanti in formazione iniziale o in servizio, stanno costruendo progetti di intervento nelle loro classi. Il riesame dei percorsi effettivamente realizzati costruirà un insieme di percorsi traiettorie legati al tema scelto, da riesaminare dal punto di vista della ricerca e da riprovare in un numero più ampio di classi.

### *Riferimento alla letteratura*

La letteratura di ricerca sul tema della proporzionalità, le difficoltà di apprendimento e le proposte per il loro superamento è molto ampia e non si potrà qui riportarne dettagliatamente metodi e risultati. Di essa si è tenuto conto in particolare per quanto riguarda le più diffuse difficoltà di apprendimento e le proposte per la scuola di base e la formazione degli insegnanti fin dalla scuola dell'infanzia e primaria. (vedi in particolare Mellone, Pezzia 2007 e il Materiale 2007 nel sito <http://www.dm.unito.it/seמידidattica/mat07.php>)

In questa prospettiva viene proposto un percorso longitudinale che ha come obiettivo, se avviato fin dalla scuola primaria, il porre le basi perché alcune difficoltà si presentino successivamente in misura più limitata o addirittura non sorgano.

Laddove è possibile pur nel limitato spazio a disposizione il tema viene collocato nel più ampio sviluppo curricolare di temi fondamentali di matematica e di fisica.

LE DIVERSE DIMENSIONI DELLO SPAZIO DI LAVORO SULLA PROPORZIONALITA'

Aritmetica	Algebra	Geometria	Fisica
Numeri naturali, operazioni e proprietà attraverso diverse forme di rappresentazione	Strutture: $a + b = c$ $a \cdot b = c$ Le due strutture inverse dell'addizione: $c - a = b$ $c - b = a$ Le due strutture inverse della moltiplicazione: $c : a = b$ $c : b = a$	Costruzione di rettangoli di lati a e b con: $a + b = k$ $a - b = k$ $a \cdot b = k$ $a : b = k$ a, b appartenenti a N	Un fenomeno/diverse forme di rappresentazione  Una forma di rappresentazione/diversi fenomeni
	Relazioni tra due insiemi  Relazioni nell'insieme dei numeri naturali (è multiplo di ..., è divisore di ..., è minore (maggiore) di..., precede ..., ecc.)	Dai rettangoli alla rappresentazione sul piano (a,b): il luogo dei punti del vertice "libero"	Variabili e loro relazioni: costruzione di rappresentazioni grafiche da tabelle di misura e da trasduzione on-line forma del fenomeno/ forma del grafico
Insieme dei numeri reali	Funzioni: $y=f(x)$ -Rappresentazione mediante tabella (coppie ordinate) - Rappresentazione nel piano cartesiano	Dai rettangoli alla rappresentazione sul piano (a,b): il luogo dei punti del vertice "libero"  a,b appartenenti a R	Interpretazione di rappresentazioni grafiche.  forma del grafico/ forma dei fenomeni Intervallo di validità
Rapporti	Forma del grafico / forma algebrica della funzione	Forma del luogo dei punti (a,b) / forma algebrica della relazione	Forma del fenomeno / forma del grafico/ forma algebrica della funzione
Confronto tra rapporti  Proporzioni	La funzione di proporzionalità  Proporzioni	Similitudine ed equivalenza  Proporzioni	Grandezze proporzionali: il calcolo e il significato delle variabili e dei parametri.

La tabella riporta in verticale i passaggi fondamentali da percorrere in aritmetica, algebra, geometria e fisica rispetto all'idea di proporzionalità. Vengono accostati i diversi ambiti in una visione schematica sintetica per permettere di cogliere le connessioni tra essi e le possibilità di interazioni costruttive e sinergie.

I percorsi in classe (traiettorie), che si possono seguire ispirandosi a questo spazio di lavoro (corridoio), varieranno a seconda del livello scolastico e del tempo che si intende dedicare all'argomento dai diversi punti di vista.

Di seguito approfondiamo e commentiamo alcuni dei temi riportati in tabella per dare evidenza alle relazioni tra i diversi aspetti matematici e tra questi e quelli fisici.

## ARITMETICA E ALGEBRA

Può sorprendere trovare incluso in questo schema i numeri e le operazioni in  $\mathbb{N}$ , temi che appaiono nel lavoro in classe così lontani nel tempo rispetto ad altri che vediamo più legati all'idea di proporzionalità. Ma ci è sembrato che non si potesse prescindere da un cenno a questi primi passi per dare evidenza al fatto che la costruzione di idee di fondo (*core ideas* nella terminologia di AA. VV. 2007) viene da lontano e trae evidenza dalla trasversalità rispetto a una trattazione strettamente lineare.

Il discorso è molto complesso, per ora ci accontentiamo di esemplificare su due punti.

Se vogliamo dare una lettura aritmetico/algebrica della realtà dobbiamo comporre numeri con le quattro operazioni aritmetiche fondamentali. La vera difficoltà che incontrano i bambini/ragazzi sta nel trovare le operazioni per “risolvere i problemi”; quindi nel riconoscimento di strutture.

Visto che parleremo soprattutto di proporzionalità, consideriamo in particolare questo aspetto: i ragazzi (ma anche gli adulti) richiesti di operare confronti procedono generalmente per differenze tra i numeri di cui dispongono invece che per rapporti. La chiarezza sulla scelta delle operazioni da eseguire può avvenire quando si è ben strutturato il significato delle operazioni, il che equivale ad avere chiare le strutture delle operazioni.

Avviando i bambini all'importanza di diverse forme di rappresentazione potremo introdurre le operazioni facendo emergere strutture fin dalla scuola elementare, attraverso il riconoscimento di analogie di rappresentazione.

### Considerazioni sull'addizione

In varie situazioni di realtà componiamo  $a$  passi con  $b$  passi, oppure  $a$  libri con  $b$  libri, la lunghezza  $a$  con la lunghezza  $b$  di due diversi tratti di strada, ecc., per sapere quanti passi abbiamo fatto, quanti libri abbiamo acquistato o letto, quanto è lungo l'intero percorso, ecc.

La scrittura  $a + b = c$  traduce (rappresenta) l'aspetto aritmetico/algebrico di tutte le situazioni considerate.

Ma possiamo dare anche una *rappresentazione spaziale* sulla retta: spostamento  $a$  seguito da spostamento  $b$ ; la somma  $c$  è data dal numero che corrisponde al punto di arrivo<sup>1</sup>.

Notiamo che la sintassi è unica per la pluralità delle situazioni che vogliamo considerare.

E' importante anche abituare i bambini, data la struttura, a pensare alle possibili “storie” che tale struttura traduce (rappresenta).

### Considerazioni sulla moltiplicazione

Analizziamo altre situazioni di realtà: porto sul tavolo 5 libri, ripeto l'azione per 4 volte; faccio 8 passi in avanti, ripeto l'azione per 3 volte; per ricoprire un pavimento di forma rettangolare con piastrelle quadrate, appoggio una prima striscia di 16 piastrelle, ripeto l'azione per 20 volte; ecc. Mi interessa sapere quanti sono i libri sul tavolo, quanti passi ho fatto, quante piastrelle dispongo sul pavimento, ecc.

Cerchiamo di costruire un modello unificante: il “numero di volte”. Riformuliamo così gli esempi precedenti: prendiamo *5 libri per volta per 4 volte*; facciamo *8 passi per volta per 3 volte*; costruisci una striscia di  *$a$  quadrati per volta per  $b$  volte* (per calcolare l'area del rettangolo con i lati lunghi  $a$  e  $b$ ), ecc.

Ogni moltiplicazione è sempre del tipo:  $a$  cose per volta per  $b$  volte  $\rightarrow$  cose.

Ci rendiamo conto che i due numeri che entrano in gioco hanno significati diversi (5 libri, 4 volte; 8 passi, 3 volte; ecc.). Questo non succedeva nell'addizione ( $a$  passi,  $b$  passi;  $a$  libri,  $b$  libri; ...).

Un'attenta analisi dei dati contenuti nel testo di un “problema”, potrebbe già orientare sulla struttura sottesa, alla luce di questa considerazione.

La scrittura  $a \cdot b = c$  traduce (rappresenta) l'aspetto aritmetico/algebrico.

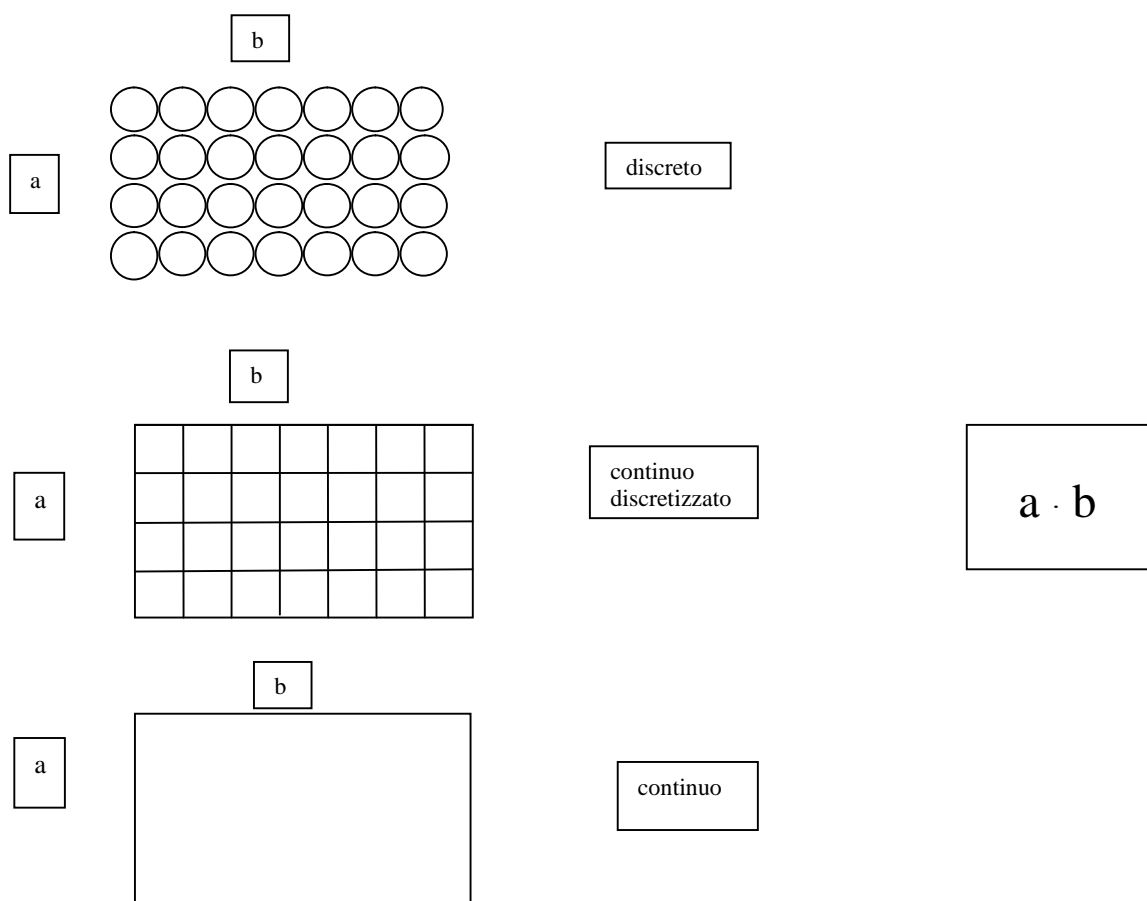
Ci chiediamo ora se la rappresentazione della moltiplicazione sulla retta è significativa. Di fatto nella moltiplicazione andiamo a comporre due numeri che hanno un significato diverso: il riportare

---

<sup>1</sup> Rispetto al punto di partenza, dove si colloca l'osservatore indispensabile per parlare di moto, vedi fisica

5 spostamenti per 3 volte è possibile, ma perdiamo parte dell'informazione sul fatto che i numeri hanno un significato diverso.

Proponiamo una *rappresentazione spaziale* nel piano, tenendo sempre presente le situazioni che richiedono la gestione del *discreto* (i libri, i passi, ...), del *continuo discretizzato* (le piastrelle per ricoprire un pavimento che ha lati lunghi a e b, del *continuo*<sup>2</sup> (due grandezze continue).



Possiamo verificare che le varie situazioni proposte all'inizio possono essere tutte rappresentate attraverso la rappresentazione nel piano. Questa dà evidenza alle due grandezze in gioco (spesso grandezze non omogenee) e come vedremo, suggerisce in modo evidente la struttura di divisione (meglio, le *due* strutture di divisione).

Notiamo che la sintassi è unica per la pluralità delle situazioni che vogliamo considerare.

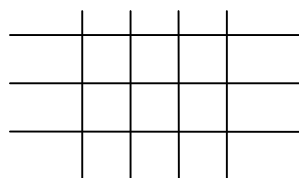
Anche nel caso della moltiplicazione è importante abituare i bambini a presentare una pluralità di situazioni rappresentabili con la forma algebrica  $a \cdot b = c$ .

Una analoga rappresentazione nel piano ottenuta sostituendo alle "righe" e "colonne" del modello discreto, a segmenti verticali e b segmenti orizzontali, ci porta alla costruzione di reticoli, in cui il numero c di "incroci" (o nodi) ci dà il prodotto.

Osserviamo che tale rappresentazione della moltiplicazione nel piano è funzionale, in particolare, alla visualizzazione di

$$a \cdot 0 \quad \text{e} \quad a \cdot 1$$

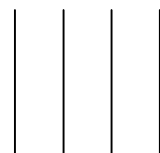
<sup>2</sup> discreto, continuo e continuo discretizzato sono usati nel senso proposto da P. Guidoni (ad esempio in Arca', Guidoni 1989 e in vari lavori successivi) e utilizzato ad esempio da Mellone e Pezzia (2007)



$a \cdot b = c$   
 Traccio  $a$  segmenti verticali e  $b$  segmenti orizzontali.  
 Conto i punti di intersezione e ottengo  $c$



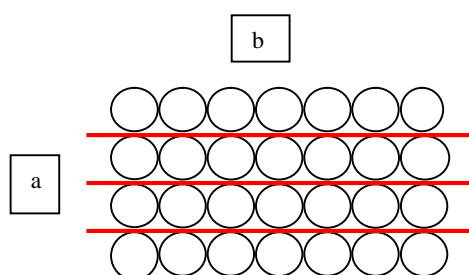
$a \cdot 1 = a$   
 Traccio  $a$  segmenti verticali e 1 segmento orizzontale ( $b=1$ ).  
 Conto i punti di intersezione e ottengo  $c = a$



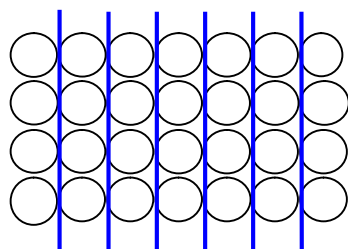
$a \cdot 0 = 0$   
 Traccio  $a$  segmenti verticali; non posso tracciare segmenti orizzontali ( $b=0$ ).  
 Non ci sono punti di intersezione:  $c = 0$

Considerazioni sulla divisione

Diamo la rappresentazione delle due strutture di divisione, a partire dalla rappresentazione spaziale della moltiplicazione.



$a \cdot b = c$   
 $c : a = b$



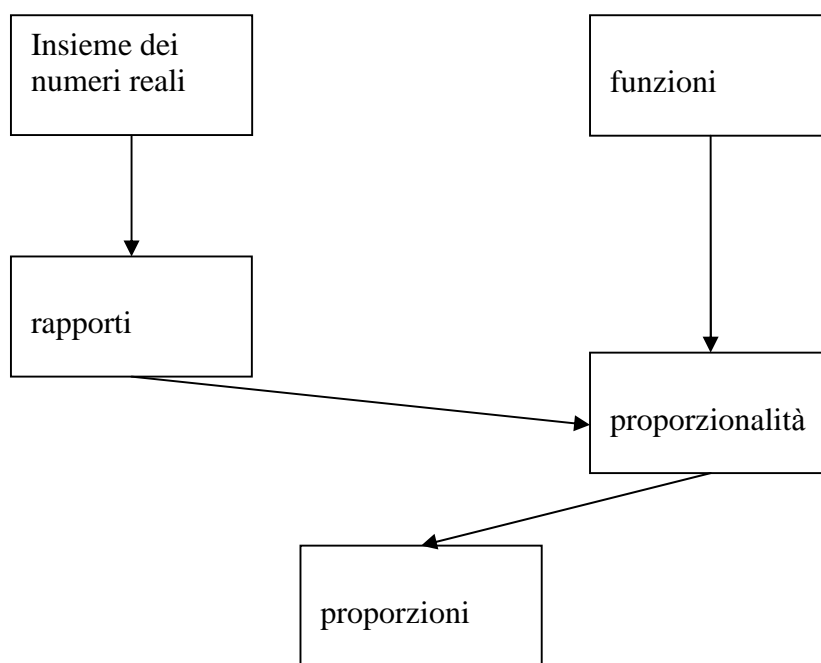
$a \cdot b = c$   
 $c : b = a$

- cose : cose/volta = volte (divisione di contenenza)
- cose : volte = cose/volta (divisione di ripartizione)

Possiamo pensare a un altro tipo di rappresentazione, proponendo ai bambini di analizzare i gesti del braccio o della mano che devono fare per realizzare concretamente situazioni che si presentano nella vita di classe, al fine di aiutarli a capire le differenze tra le due strutture. Otteniamo una rappresentazione legata alla gestualità.

## Una sequenza sulla proporzionalità

Consideriamo una possibile sequenza per affrontare il tema della proporzionalità, rappresentata schematicamente qui di seguito.



Per quanto riguarda l'introduzione delle funzioni si rimanda al lavoro presentato al convegno di Torino 2005 (Giordano, Bonelli Majorino 2006).

In tale lavoro si illustra come portare i ragazzi al concetto di corrispondenza tra forma algebrica della funzione e forma della rappresentazione nel piano cartesiano; nelle pagine seguenti concetti di corrispondenza vengono ripresi e fondati anche nella sequenze di fisica.

Qui vogliamo riflettere sulle motivazioni che ci orientano verso l'introduzione della proporzionalità e delle proporzioni dopo aver affrontato una sequenza sulle funzioni.

All'uscita dalla scuola media spesso i ragazzi identificano le funzioni con le due funzioni di proporzionalità  $y=kx$  e  $y=k/x$  (situazione verbalizzata da più di un ragazzo di scuola superiore, all'inizio dello studio delle funzioni: "Credevo che le funzioni fossero quelle di proporzionalità, perché nella scuola media ho visto solo quelle e poi per qualche anno nel programma di matematica non mi hanno più parlato di funzioni"). Se prima vedono funzioni di diversa forma, colgono la proporzionalità come una funzione ben caratterizzata rispetto alle infinite altre possibili.

Inoltre, se tra le infinite possibili funzioni decidiamo di dedicare attenzione a questa, significa che questa ha una particolare importanza.

Arriviamo poi alle proporzioni dall'analisi delle proprietà della funzione di proporzionalità diretta dove è *necessario confrontare* rapporti per decidere se sono uguali: se  $x/x'=y/y'$  ( $y/x=y'/x'$ ), allora gli insiemi di numeri X e Y sono direttamente proporzionali.

Chiamiamo proporzione l'uguaglianza di due rapporti:  $x/x'=y/y'$  e  $y/x=y'/x'$ . Ma arrivando a questo passaggio dalla relazione di proporzionalità, motiviamo l'interesse per le proporzioni. Infine una considerazione di carattere generale: l'introdurre *prima* le proporzioni e *poi* la proporzionalità, come spesso si fa, può suggerire una visione della matematica in cui *prima* si creano gli strumenti e *poi* se ne vedono le applicazioni.

Ma vogliamo ancora una volta riprendere un quadro generale in cui possiamo cogliere sia una pluralità di rappresentazioni per una stessa struttura, sia un particolare approccio alla proporzionalità (che verrà poi affrontata da molti altri punti di vista sia nella matematica che nella fisica).

## Strutture e rappresentazioni

Diamo la regola di costruzione di una figura		Formalizzazione		
		relazione geometrica	relazione algebrica	funzioni
<i>Costruire rettangoli con l'altezza tripla della base</i>	QUANTE SOLUZIONI IN $\mathbb{N}$ ?	Rettangoli simili	$h = 3b$ $h/b = 3$ <b>rapporti costanti</b>	$y = 3x$ $y/x = 3$ <b>funzione di proporzionalità diretta</b>
<i>Costruire rettangoli con l'altezza uguale alla somma della base e di un segmento lungo 3 (stessa unità della base)</i>	QUANTE SOLUZIONI IN $\mathbb{R}_+$ ?	Rettangoli che hanno differenza costante tra altezza e base	$h = b + 3$ $h - b = 3$ <b>differenze costanti</b>	$y = x + 3$ $y - x = 3$
<i>Costruire rettangoli equivalenti con l'area uguale a 36</i>	INDIVIDUAZIONI E DI COSTANTI E VARIABILI	Rettangoli equivalenti	$h \cdot b = 36$ $h = 36/b$ <b>prodotti costanti</b>	$y \cdot x = 36$ $y = 36/x$ <b>funzione di proporzionalità inversa</b>
<i>Costruire rettangoli isoperimetrici con il perimetro lungo 24</i>		Rettangoli isoperimetrici	$b + h = 12$ $h = b - 12$ <b>somme costanti</b>	$y + x = 12$ $y = 12 - x$

Di tutto il quadro esemplifichiamo di seguito solo le situazioni riportate nella prima riga, anche se pensiamo che la proposta abbia un senso compiuto se si analizzano tutte le strutture considerate.

### Rappresentazioni per la struttura $a : b = k$

Schematizziamo i punti della sequenza.

a) La rappresentazione geometrica

Consideriamo i rettangoli in cui il rapporto tra l'altezza e la base è  $k$  ( $h:b=k$  ;  $h=b \cdot k$ )

- disegniamo rettangoli con le lunghezze dei lati espresse da numeri naturali: quante soluzioni?

#### FIG. 1

- sovrapponiamo i rettangoli; cogliamo l'allineamento del vertice "libero" dei vari rettangoli con  $h:b=3$  (una "regolarità") **FIG. 2**

- che cosa succede se ricerchiamo le soluzioni nell'insieme dei numeri reali positivi? Quante soluzioni? (dal discreto al continuo)

b) La funzione  $y : x = k$ ;  $y = k \cdot x$  la funzione di proporzionalità diretta. **FIG. 3**

Costruiamo il grafico della funzione riportando sugli assi le variabili base e altezza, variabili continue.

Ogni punto  $(B, H)$  della semiretta individua un rettangolo soluzione (nell'insieme  $R_a$ ) del problema posto all'inizio.

Analizziamo il "modo di crescere" dell'altezza in funzione della base.

Se consideriamo due diversi punti  $(B_1, H_1)$  e  $(B_2, H_2)$ , individuiamo i triangoli  $OB_1H_1$ , e  $OB_2H_2$ ; possiamo verificare che i rapporti  $OB_1/OB_2$  e  $B_1H_1/B_2H_2$  sono uguali; ma sono uguali anche i rapporti  $B_1H_1/O_1H_1$  e  $B_2H_2/O_2H_2$ . Possiamo notare che i primi rapporti ci danno informazioni sul cambiamento di scala delle figure, i secondi rapporti ci danno informazioni sulla "forma" delle figure stesse (la regola di costruzione data all'inizio).

La scrittura  $OB_1/OB_2 = B_1H_1/B_2H_2$  e  $B_1H_1/O_1H_1 = B_2H_2/O_2H_2$  definisce le due proporzioni.

c) La tabella della divisione in  $N$ . **FIG. 4**

Quante coppie ordinate  $(a, b)$  tali che  $a : b = k$  posso individuare? Quale allineamento individuo?

Le tabelle delle quattro operazioni vengono fatte costruire anche nella scuola primaria. Spesso però sono viste solo come puro "esercizio addestrativo", proponendo tabelle molto ridotte in cui non necessariamente il primo e il secondo termine sono scanditi secondo la successione dei numeri naturali, ma sono numeri naturali scelti a caso, quindi senza un criterio ben definito. E' utile anche l'esercizio addestrativo. Ma ben altro valore ha il proporre tabelle come quelle date in figura 4; qui si sposta l'attenzione dei bambini a trovare in esse regolarità.

Riprese poi nella scuola media, possono aiutare i ragazzi a riconoscere analogie tra le varie rappresentazioni. Per esempio, nella figura 4 l'allineamento per  $a : b = 3$  richiama l'andamento del grafico di figura 3. La pendenza verso il basso dell'allineamento di figura 4 è dovuto al fatto che la successione dei numeri in verticale cresce verso il basso, mentre nella rappresentazione cartesiana della relazione sull'asse verticale i numeri crescono verso l'alto.

Questa analogia tra tabella e grafico si può cogliere anche per le altre operazioni (per esempio per  $a \cdot b = k$  le coppie ordinate  $(a, b)$  sono disposte su un arco di iperbole; il grafico della funzione  $x \cdot y = k$  è un ramo di iperbole per  $x$  e  $y$  positivi).

Qui vediamo lavori che possono essere fatti in momenti diversi del percorso scolastico: le tabelle delle operazioni nella scuola primaria; le parte di rappresentazione degli insiemi di rettangoli e della soluzione del problema in  $N$  nel secondo ciclo di scuola primaria o anche in una prima media; la soluzione del problema in  $R_a$  in una seconda media (così come lo studio della similitudine e dell'equivalenza); lo studio delle funzioni in un momento ancora successivo. Cogliamo diversi livelli di astrazione nelle varie elaborazioni e anche altri diversi obiettivi a seconda di come collochiamo la proposta didattica. Però è fondamentale che nell'insegnante ci sia la consapevolezza della trasversalità di alcuni temi fondanti quali le diverse modalità di rappresentazione, le analogie strutturali, la progressione verso l'astrazione. Questo permetterà di riprendere in diversi momenti le elaborazioni via via prodotte al fine di rendere consapevoli anche i ragazzi dell'importanza di momenti metacognitivi.

### **Fisica: dal fenomeno alla(e) rappresentazione(i)**

#### *Lo studio del cambiamento*

Uno dei temi fondamentali dell'insegnamento delle scienze rispetto al quale si vorrebbe perseguire un apprendimento di qualità, profondo e non solo esecutivo e mnemonico, è il tema del cambiamento. Cosa significa che una cosa (oggetto, persona, ambiente,...) cambia? come faccio a saperlo? sono domande che costituiscono l'ossatura generale e quanto di comune hanno le diverse scienze indipendentemente dai loro specifici oggetti e metodi di studio della realtà naturale.

Fin da piccoli i bambini possono essere avviati, attraverso il gioco, ad attività di osservazione e manipolazione in situazioni semplici da proporre e gestire, ma sufficientemente complesse e



coinvolgenti, così da permettere di costruire sia concetti specifici sia modi di procedere tipici della scienza, pur se adeguati al livello scolare a cui si lavora.

Ad esempio alla fine della scuola dell'infanzia-inizio elementare (ma anche dopo, ovviamente) si gioca con "caldo e freddo" e a un certo punto si fa fondere un pupazzetto di cioccolato. (AA.VV. 2007) Si chiede ai bambini di osservare attentamente e di dire cosa succede. Quando è tutto sciolto ai sollecitano i bimbi di dire cosa è cambiato. Le domande guida sono fondamentali per avviare anche la riflessione metacognitiva: E' ancora cioccolato? come lo sai? sarà sempre la stessa quantità di "roba"? che pensi? come fai a dirlo?

Fin da queste primissime esperienze ci si può rendere conto che ci sono due modi per rispondere alla domanda "cosa cambia?":

- seguire la storia (trasformazione)

- considerare proprietà osservabili e confrontarle tra gli istanti iniziali e finali (stato)<sup>3</sup>

e si può perseguire che i bimbi vivano questo processo di costruzione di conoscenza, lo sappiano descrivere e ne prendano consapevolezza.

.....

Al crescere del livello scolare i bambini devono ampliare il loro campo di esperienze e le forme di rappresentazione a loro disposizione; vanno dunque guidati a osservare e sperimentare cambiamenti e a rappresentarli in linguaggi adatti a ciascuna della due modalità descrittive (confronto tra stati – trasformazione). Fenomeni anche molto diversi tra loro possono essere simili rispetto alla strategia di base dell'organizzazione della realtà che sottendono. Questa somiglianza ( e quindi la costruzione dell'idea stessa di strategia cognitiva e di organizzatore concettuale) può emergere proprio attraverso la somiglianza tra le rappresentazioni dei fenomeni. Così una sorgente di luce con varia-luce, in cui l'intensità della luce emessa varia con continuità, una radio di cui variare il volume, ma anche solo la propria voce o il movimento delle proprie mani che si allontanano o si avvicinano possono essere modi diversi di rappresentare i cambiamenti che avvengono guardandoli per "trasformazione".

La mano che si muove a rappresentare una cosa che aumenta (diminuisce, resta costante), attraverso un pennarello può lasciare la traccia del suo movimento e quindi del cambiamento della variabile che rappresenta su un foglio sottostante; se infine questo foglio può scorrere con regolarità mentre la mano si muove (perpendicolarmente alla direzione di scorrimento del foglio), la traccia lasciata avrà una forma che dipenderà dal modo in cui la mano si muove, quindi dal modo in cui cambia la grandezza che le mani rappresentano al passare del tempo (rappresentato dal foglio che scorre o ruota<sup>4</sup>).

Si vede così che se la mano sale "regolarmente" la traccia lasciata è (quasi) rettilinea e la sua inclinazione dipende dalla velocità con cui la mano si muove (si tratta a questo livello di idee intuitive e le parole "regolarmente", "velocità", hanno senso in quanto immediatamente legate ai fatti e alle proprie percezioni). Si prova poi cosa succede se invece che salire regolarmente si accelera o si frena e analogamente per le diminuzioni (la mano scende).

Se si hanno a disposizione strumentazioni on-line (sensori collegati a PC che danno a video la rappresentazione grafica del fenomeno in tempo reale) si amplia ulteriormente il numero e il tipo di cambiamenti che si possono far avvenire e rappresentare (tipicamente cambiamenti molto veloci e molto lenti) . La fenomenologia ampia e la quantità di grafici così prodotti permette di analizzare non solo il fenomeno (di movimento, termico, ecc) oggetto di studio, ma anche di porre il problema epistemologico più generale del rapporto tra forma grafica e fenomeno.

**fig. 5** Allontanamento fermata e avvicinamento più veloce

<sup>3</sup> La strategia "guardare per stato, guardare per trasformazione" è esplicitata insieme ad altre strategie cognitive fondamentali in alcuni lavori di P. Guidoni, ad esempio "Guardare per sistemi, guardare per variabili" Emme ed, 1989

<sup>4</sup> Si pensi alle apparecchiature che sono spesso presenti nei musei e registrano graficamente, su superfici cilindriche rotanti di carta millimetrata, variabili come temperatura, pressione, umidità ecc.

**fig. 6** Allontanamento a due velocità diverse

Si deve ovviamente fare anche il viceversa, dare ad esempio un grafico ad assi muti e chiedere quanti fenomeni potrebbe rappresentare (vedi Samek, Giordano 2003, p.62)

Si acquista così una familiarità sulla corrispondenza tra fenomeni e rappresentazioni grafiche di un certo tipo (grafici lineari) privilegiandone l'aspetto complessivo sul suo costruirsi per misure di variabili e per punti.

Questo non significa che non si debbano fare misure, tabelle, grafici per punti ecc.

Questi corrispondono infatti alla visione per "stato", misurare le variabili considerate a istanti diversi di tempo ad esempio, permette poi di ricostruire per punti la storia o di vedere cosa è cambiato o rimasto costante sia a dalla rappresentazione grafica che dall'analisi dei numeri in tabella. Quindi una volta che si padroneggia questa corrispondenza tra "forma del fenomeno e forma del grafico" attraverso la propria esperienza corporea si può passare a costruire grafici "manualmente" dopo aver raccolto in tabella le misure delle variabili fondamentali che descrivono il fenomeno.

A questa fase di costruzione di grafici (da tabella o da rilevazioni via trasduzione on-line anche con sistemi raffinati di interfacce e sensori collegati a PC), dove possibile, bisogna affiancare altre forme di rappresentazione dello stesso fenomeno: dalle parole ai gesti, dalle foto ai disegni, sottolineando come ogni forma di rappresentazione colga solo alcuni aspetti del fenomeno e come sia necessario che le diverse rappresentazioni siano coerenti tra loro.

### **Dalla(e) rappresentazione(i) al fenomeno**

Alla fase di costruzione di grafici va anche affiancata la fase di lettura ed interpretazione di grafici lineari dati, sia per individuare e saper descrivere "l'andamento del grafico" sia per mettere in corrispondenza questo con l' "andamento del fenomeno" che esso rappresenta.

Questo si può fare sia sulla visione complessiva delle forme del grafico che su un'analisi puntuale dei valori numerici dei tratti principali in cui si può immaginare di suddividere il grafico (e il fenomeno).

L'insistenza su questo lavoro di corrispondenza e differenziazione tra rappresentazione grafica e fenomeno dovrebbe aiutare i ragazzi a comprendere l'importanza di padroneggiare l'aspetto matematico anche indipendentemente dal suo significato fisico e nello stesso tempo specificare la relazione tra descrizione matematica e piano sperimentale (ad esempio nel grafico della fisica ci sono tratti rettilinei non "rette", l'intervallo di validità di una forma e quindi di una relazione è fissato dai fatti, non dalle regole di esistenza della funzione).

### **Dalla forma del grafico alla forma della funzione**

Se nel frattempo in matematica è stata costruita la corrispondenza tra forma del grafico e forma algebrica della funzione che lega le due variabili riportate sugli assi, si potrà cercare di passare (dove possibile, dove si riconosce una regolarità almeno a tratti e quindi si ipotizza ci sia una "legge" che regola il fenomeno) alla forma algebrica della funzione tra variabili che hanno una precisa corrispondenza con i fatti e quindi hanno dimensioni e unità di misura da tenere in considerazione.

Un caso particolarmente interessante e importanti è quello della proporzionalità tra le due grandezze, in particolare la proporzionalità diretta.

E' molto usuale che in fisica si parta con lo studio del moto e il lavoro attraverso il movimento del proprio corpo o della mano, che descrivevamo prima, può essere direttamente collegato al moto

rettilineo. In questo caso, moto unidimensionale, anche l'uso dei sistemi on-line più semplici permette di tracciare e quindi analizzare e interpretare grafici in cui sull'asse delle x è riportato il *tempo* e su quello delle y la variabile spaziale *posizione* (che in questo caso coincide con *distanza*). La forma del grafico corrisponde alla forma del movimento (a un moto regolare di allontanamento corrisponde una retta in "salita" con pendenza più bassa per moti più lenti, a un allontanamento frenato corrisponde una forma con concavità verso il basso ecc).

Un punto su questo grafico rappresenta la *posizione istantanea* di un oggetto rispetto a un osservatore. La pendenza della curva nel punto considerato (la tangente) ci dà un'informazione sulla velocità istantanea. Dalla tabella o dal grafico è possibile ricavare anche i valori degli *intervalli* sia temporali che spaziali e quindi calcolare la velocità media sull'intero percorso o a tratti. Graficamente questo corrisponde a congiungere il punto corrispondente alla posizione finale con l'origine e a considerare la pendenza di questo *moto uniforme equivalente* (nel senso di un moto regolare, a velocità costante, che abbia gli stessi punti iniziali e finali, nello spazio e nel tempo, del moto "vero" oggetto di studio). Attraverso questo moto equivalente si riduce un moto rettilineo vario a un moto rettilineo uniforme in cui distanze e tempi di percorrenza sono direttamente proporzionali tra loro e la costante di proporzionalità (pendenza del grafico) è la velocità considerata costante (*velocità media*) di questo moto equivalente.

Analogamente si può fare in una situazione molto diversa: galleggiamento.

Si considerino diversi oggetti omogenei di vari materiali. Ad ogni oggetto corrisponderà (oltre ad altre variabili) un volume e un peso. Riportando su un grafico (V,p) i dati corrispondenti agli oggetti si vedrà che alcuni punti risultano allineati tra loro e con l'origine; questi corrispondono agli oggetti fatti dello stesso materiale. Per questi peso e volume sono direttamente proporzionali e la pendenza della retta sarà proprio caratteristica di ciascun materiale. La posizione di questa rispetto alla retta del liquido in cui gli oggetti vengono immersi permetterà di decidere se qualsiasi oggetto fatto di quel materiale galleggerà o meno. Se si tratta con oggetti fatti di diversi materiali a ciascuno di essi corrisponde un punto sul grafico. E' sempre possibile congiungere questo punto con l'origine e quindi tracciare la retta corrispondente al *materiale omogeneo equivalente* (materiale fittizio che permette di avere un oggetto omogeneo con lo stesso peso e lo stesso volume dell'oggetto disomogeneo considerato) e considerare un *peso specifico medio*, che corrisponde al peso specifico del materiale equivalente ma spesso, per semplicità, viene attribuito all'oggetto.

**Fig. 7** grafico volume, peso per interpretare il galleggiamento in un liquido (acqua)

Analogia struttura hanno i problemi di spesa (con peso e costo sugli assi e "costosità" legata alla pendenza); i problemi di dolcezza/sapidità di una soluzione (con volume di solvente e peso di soluto sugli assi e concentrazione legata alla pendenza); i problemi di misura di una forza e costruzione di un dinamometro (con allungamento e forza sugli assi e coefficiente di elasticità o rigidità della molla legata alla pendenza); e così via.

Il problema per molti studenti dei diversi livelli scolari fino alla formazione degli insegnanti è passare dai fenomeni e dalla risoluzione intuitiva dei problemi di proporzionalità a una loro gestione numerica e algebrica corretta, oltre alla costruzione dei significati della diverse grandezze in gioco. Così se è facile capire che la dolcezza di un bicchiere con acqua e zucchero dipenderà da quanta acqua c'è e da quanto zucchero, non è facile capire che si può fare il rapporto tra i due pesi (masse) per ottenere il valore della "dolcezza" (se faccio massa zucchero/massa acqua, altrimenti il reciproco...) e che due soluzioni sono ugualmente dolci se questo rapporto rimane costante al variare della quantità dell'acqua e dello zucchero.

Analogamente per spazi e tempi, prezzi e quantità, pesi e volumi ecc

Il passaggio attraverso la rappresentazione grafica può aiutare, in particolare se la familiarità con le forme grafiche si è perseguita nei diversi contesti e problemi come abbiamo accennato più sopra sia

in matematica che in fisica. Se si è affrontato il collegamento tra similitudine e proporzionalità diretta e la possibilità di scrivere proporzioni tra segmenti o valori delle grandezze in gioco, passando attraverso il grafico si vedrà che si possono considerare “sotto” una stessa retta tanti triangoli rettangoli simili.

**fig 8**                      Triangoli simili “sotto” la retta del sughero

Il confronto tra i cateti corrispondenti di due di essi permetterà di scrivere la proporzione  $V_1 : V_2 = p_1 : p_2$ , uguaglianza di due divisioni di contenenza. Se invece si considera la proporzione “interna” alla figura (rapporto tra i due cateti dello stesso triangolo) si troverà  $p_1 : V_1 = p_2 : V_2$  non riconoscibile né come una divisione di contenenza né di partizione, ma il cui significato si trova in relazione ai fatti osservati. La pendenza della retta permette di definire il peso specifico del materiale e a calcolarlo come peso del volume unitario ponendo uguale a 1 uno dei termini della proporzione. Analogamente per le altre situazioni di proporzionalità avremo sugli assi variabili diverse. La relazione generale sarà della forma  $y_1 : x_1 = y_2 : x_2$  e definirà a seconda dei casi la velocità, la concentrazione, la durezza di una molla, ecc.

Il gioco numerico e algebrico permette di ridurre un problema a tre variabili: peso, volume, materiale; soluto, solvente, soluzione; spazio, tempo, velocità; ecc. a un problema a due variabili essendo le tre legate da una relazione di proporzionalità (diretta o inversa ovviamente!).

La variabile legata alla pendenza è una variabile intensiva (non obbedisce al principio di somma, mescolando due quantità uguali di acqua ugualmente zuccherata non si ottiene acqua dolce il doppio), ma non va interpretata come un indice o un parametro, poiché a sua volta è una variabile come è ben evidente soprattutto dal caso della velocità.<sup>5</sup>

## Bibliografia

AA.VV. (2007) *Taking science to school K-8* <http://www.nap.edu/catalog/11625.html>

Arcà M., Guidoni P. *Guardare per sistemi, guardare per variabili*, Emme ed, Milano 1989

Bonelli Majorino P., Gagliardi M., Giordano E. *Metacognizione come metacoscienza: l'insegnamento della fisica*. In Albanese O., Doudin P.A., Martin D. “Metacognizione ed educazione”, Franco Angeli, Milano, 2003, pp. 232-251.

Confrey “The evolution of Design Studies as Methodology” in R.K. Sawyer ed. “The Cambridge Handbook of the learning sciences”, Cambridge University Press, 2006, pp.135-151

Giordano E. –Bonelli Majorino P. “Esempi di interferenze costruttive tra matematica e fisica nella scuola di base” nel volume *La matematica e la fisica nella formazione degli insegnanti* a cura di Ornella Robutti e Miranda Mosca, Ghisetti e Corvi Ed, Milano 2006; pp. 105-118

Guidoni P., “Fisica e matematica: una interferenza costruttiva” nel volume *La matematica e la fisica nella formazione degli insegnanti* a cura di Ornella Robutti e Miranda Mosca, Ghisetti e Corvi Ed, Milano 2006

Mellone M., Pezzia M. “Un progetto di ricerca-azione sulle strutture aritmetiche nella scuola di base” nei materiali del Seminario di ricerca in didattica della matematica Rimini 2007 <http://www.dm.unito.it/semdidattica/mat07.php>

Samek Ludovici P., Giordano E. (a cura di): “Laboratori in rete: una comunità di pratiche per rinnovare il curriculum di scienze”, Franco Angeli, Milano 2003

---

<sup>5</sup> I grafici di moto possono anche essere grafici che riportano sugli assi proprio (t,v) e la pendenza in questo caso corrisponde alla accelerazione

$h : b = 3$

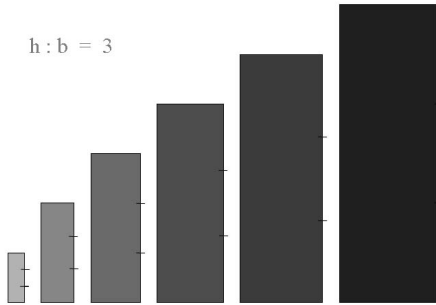


Fig. 1

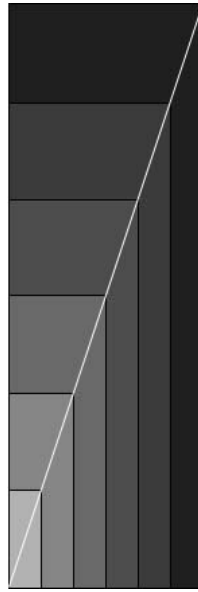


Fig. 2

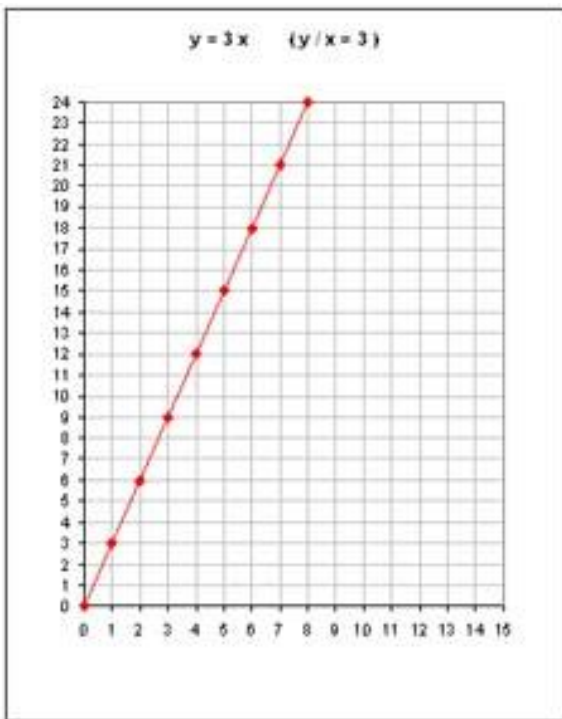


Fig.3



Fig 4

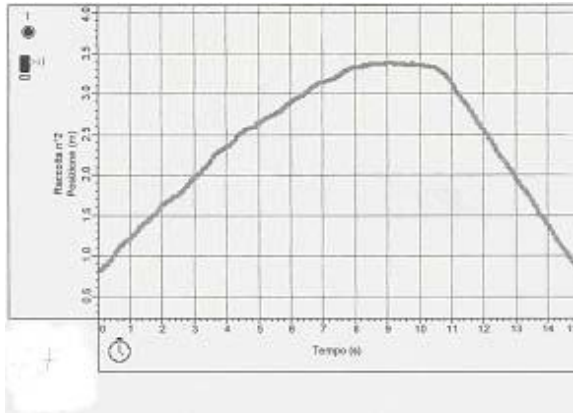


Fig. 5

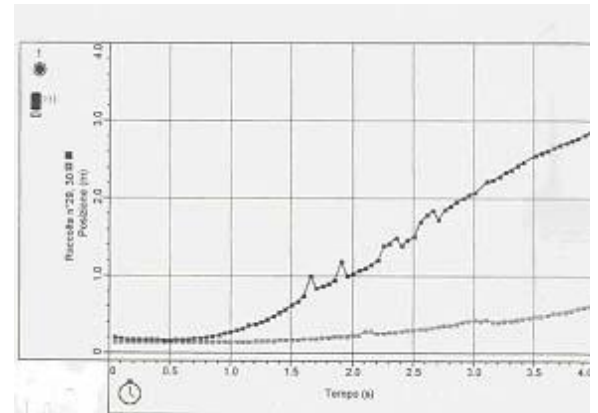


Fig. 6

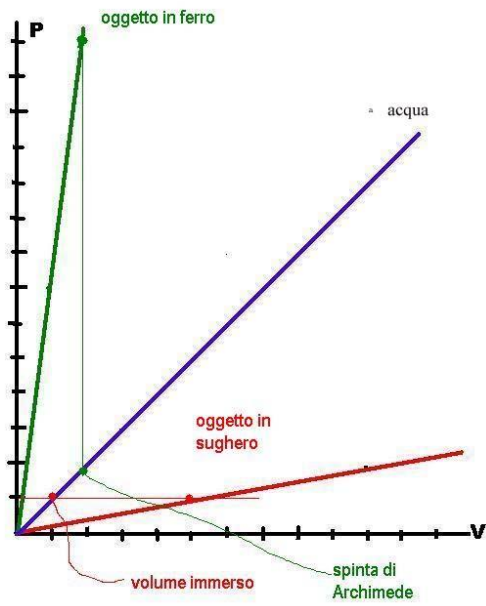


Fig. 7

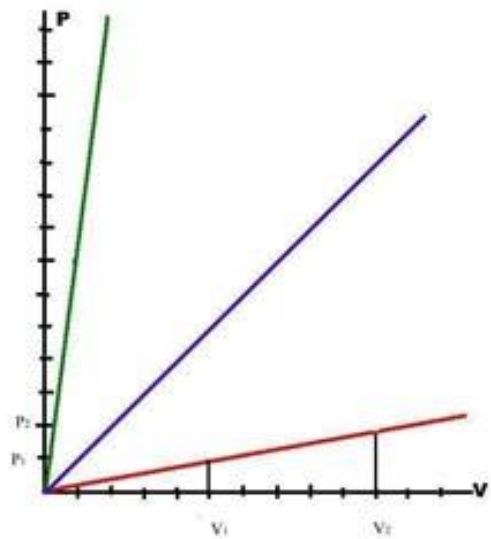


Fig. 8