



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO BICOCCA
Dipartimento di Scienze dell'Ambiente e del Territorio
Scuola di Dottorato in Scienze Ambientali
1, piazza della Scienza
20126 MILANO, Italy

Anno Accademico 2005 - 2006

Insegnamento dedicato

PROBLEMI INVERSI PER LE SCIENZE AMBIENTALI

GIOVANNI FRANCO CROSTA
crgvfa@yahoo.com
Giovanni_Crosta@uml.edu

Lezione Zero

20050422

Problemi Inversi per le Scienze Ambientali

1 - prologo

Come l'opportunità di una didattica affrontante dedicata alle scuole di dottorato e Scienze Ambientali e che interviene davanti al Collegio di docenti.

Tema privilegiato: i problemi inversi;

Collegamenti: metodi matematici per trattare la complessità.

2 - complex data sources

The challenge of complexity

3 - Coping with complexity

il collegamento diventerà chiaro progressivamente.

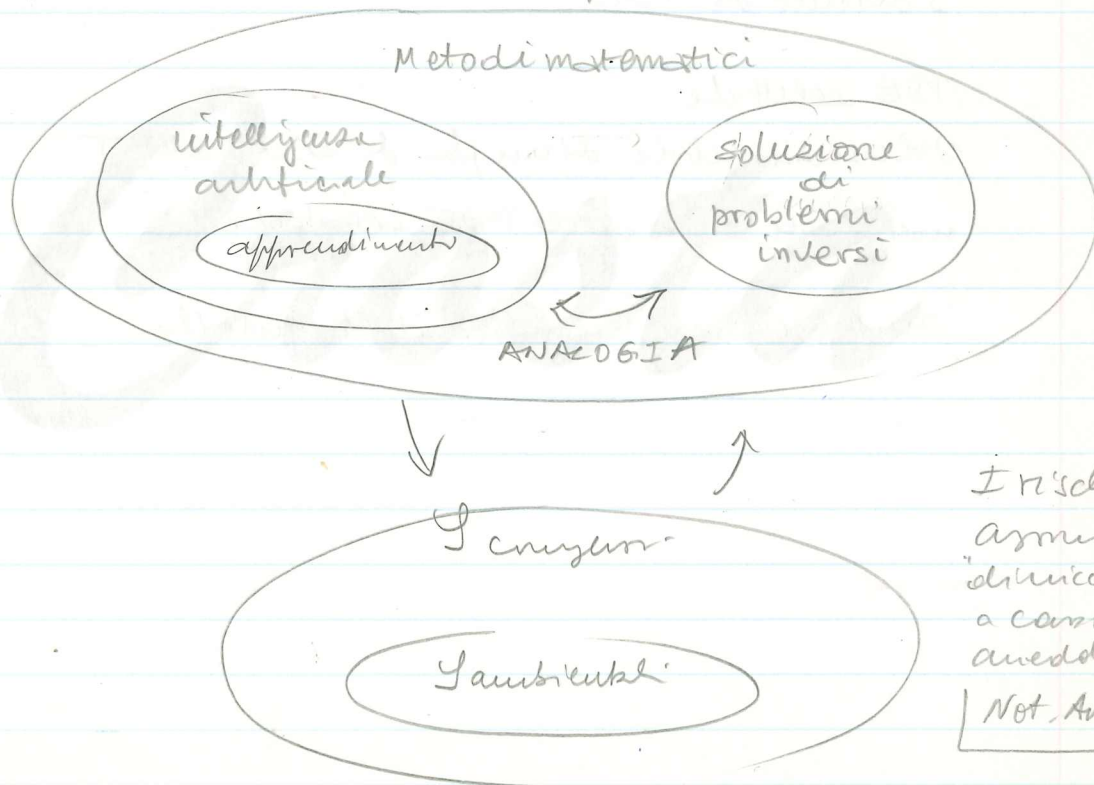
4 - ... è un ulteriore argomento. Alla ricerca di una certezza delle nostre Scienze Ambientali.

Ragioni storiche e realistiche

irrapponibili necessariamente conflittuali all'interno del Sistema Universitario

W. CHURCHILL.

5. method-mathematici e \mathcal{G} complexi



Trischi
argomento "drammatico"
a carattere aneddotico
Not. AmS

6 - Ulfenwi fwtgno : M GROMOV, Notices AMS, Aug 1998
(distribuire copia)

7 - Tabelle dei contenuti proposti

1 lezione = 45 + 45 min.

problemi ben posti e mal posti secondo J HADAMARD 1L

*) nozioni generali su \mathcal{L} dinamici: finito dimensionale $2L^*$

- definizioni armonizzate
- definizioni di stabilità
- criteri di stabilità di LYAPUNOV
- criteri di stabilità per \mathcal{L} lineari, invarianti

*) argomenti riservati a chi ha spirito d'inspiramento di
modello matematico o Sistemi dinamici

\mathcal{L} compattezza; definizioni e proprietà } 2L
problemi inversi per \mathcal{L} compattezza

(nozioni di) teoria matematica dell'apprendimento 1L

*) \mathcal{L} derivati di PDE 1L*

PDE ellittiche

soluzione debole di un p.m. di DIRICHLET } 2L

nozioni di teoria delle PDE ellittiche

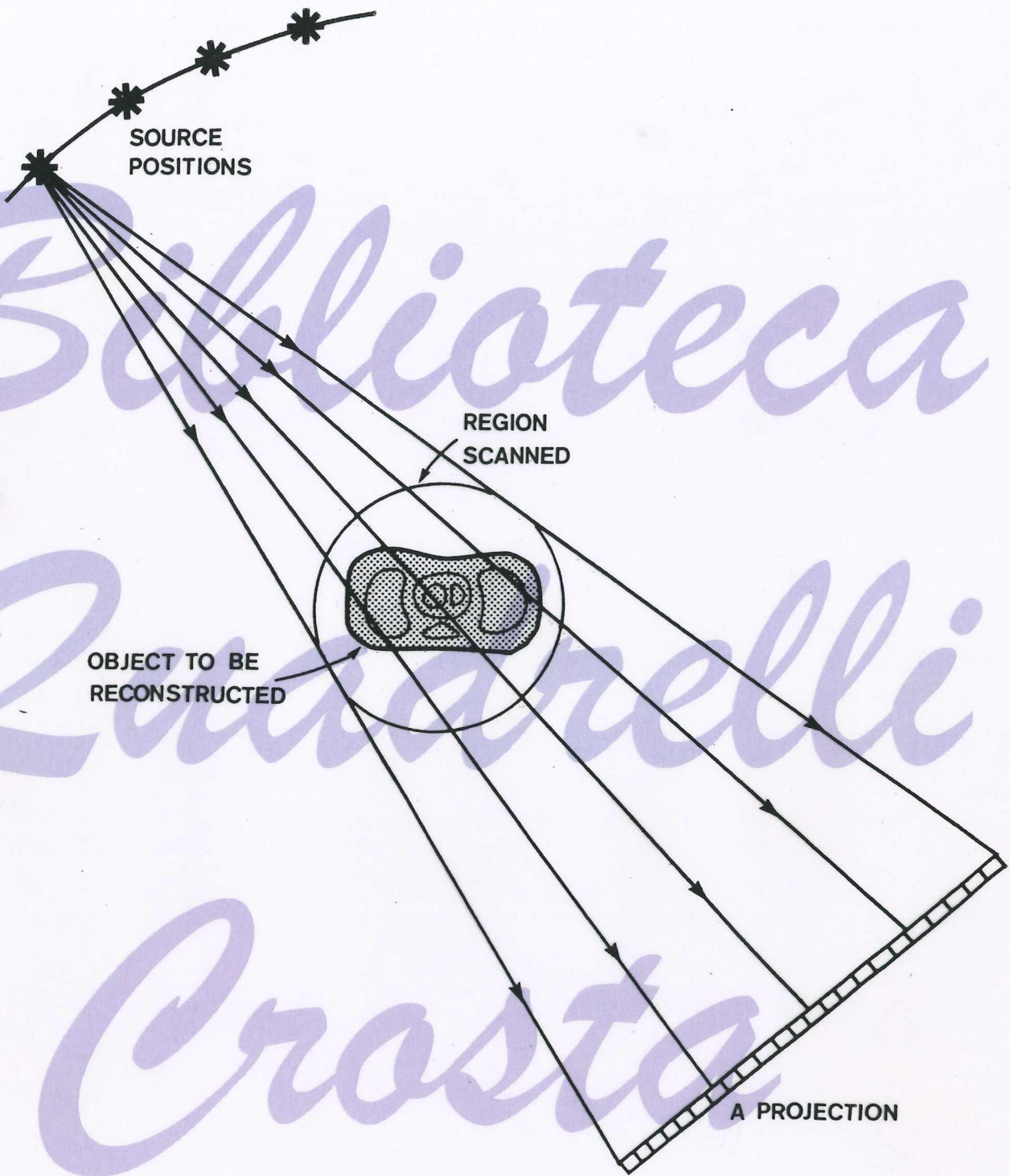
identificazione esistenziale al controllo

1L
9L + 3L*

Un problema inverso nella storia:
da PLATONE a G.W. HOUNSFIELD:
la ricostruzione da proiezioni

- * Mito della caverna (PLATONE,
"La Repubblica", Lib. VII)
- ricostruzione della realtà dalle ombre
- * J. RADON
"Über die Bestimmung von
Funktionen durch ihre Integralwerte
längs gewisser Mannigfaltigkeiten"
Ber. Sächs. Akad. Wiss. 69 (1917) 262-77
- * A.N. BRACEWELL (~1960)
- R.H.T. BATES (~1970)
- R. GORDON, G.T. HERMAN (1970 →)
- G.W. HOUNSFIELD (1973 →)
- L. SHEPP, B.F. LOGAN (1974)
- H.H. BARRETT (1975 →)
-
-

Crasta



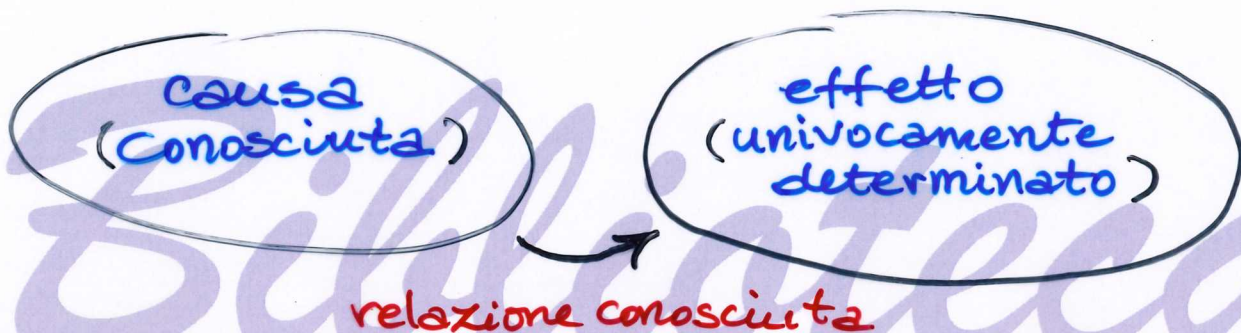
Schema di tomografo transassiale
 con fascio di raggi X a ventaglio

Fan-beam X -ray tomography scheme

7202

Generalità sui problemi inversi

Paradigma di PIERRE SIMON DE LAPLACE
(1749-1827)



$$\begin{array}{ccc} \text{causa} & & \text{effetto} \\ x & \xrightarrow{\kappa} & y = \kappa[x] \end{array}$$

DEF (problema diretto)

Ogni problema che consista nel determinare un effetto osservabile ed univocamente determinato, a partire da cause conosciute, da una legge di evoluzione conosciuta e "regolare" è definito

problema diretto
secondo il paradigma classico delle scienze matematiche (*)

(*) la classe delle scienze alle quali si può applicare la matematica

DEF (problema inverso)

Ogni problema che devii dal paradigma classico per almeno una delle seguenti ragioni

- * noto l'effetto si intende, tramite la legge di evoluzione, risalire alla causa,
- * noti l'effetto e la causa si intende determinare la legge di evoluzione,

è un problema inverso

$$\{y, \kappa[\cdot]\} \xrightarrow{?} x$$

$$\{x_i, y_i \mid i \in I\} \xrightarrow{?} \kappa[\cdot]$$

Classi di problemi inversi

@ tempo fisso)

determinazione di osservabili tramite misure indirette;

tele-rilevamento;

determinazione di grandezze definite all'interno di un dominio, tramite misure sul contorno

entro un intervallo temporale)

ricostruzione di eventi passati tramite misure nel presente

Nozione di problema ben posto secondo JACQUES HADAMARD (1865-1963)

Un problema la cui soluzione ~~sia~~

1) **esista**

2) **sia unica**

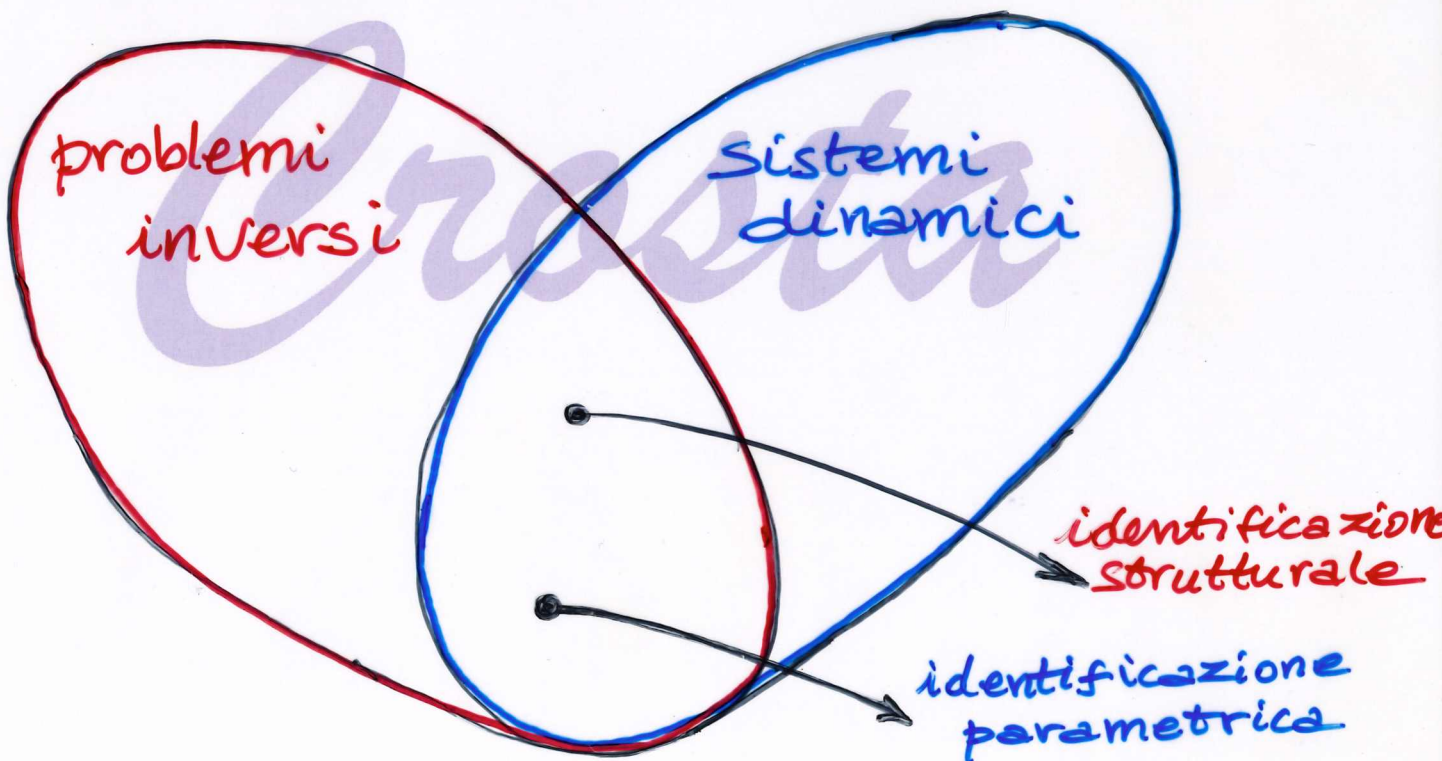
3) dipenda in modo **regolare** ("continuo") dai dati

è **ben posto** nel senso di J.H.

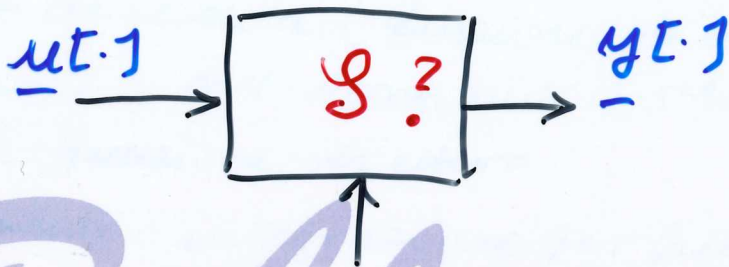
Oss. "per definizione" un problema **diretto** è formulato in modo da essere ben posto

Ad un problema **inverso** mancano in generale una o più delle 3 proprietà \Rightarrow un problema inverso è generalmente **mal posto** nel senso di J.H.

Problemi inversi & sistemi dinamici



Problema dell'identificazione



1- livello: **identificazione** strutturale

Date $\{ \underline{u}[t]; \underline{y}[t] \}$, $t_0 \leq t \leq t_1$

determinare la **struttura** del S dinamico

1) \rightarrow **regolare** $\Leftrightarrow \rightarrow$ **$\dim[S] = ?$**

\rightarrow non regolare

tipo di S di equazioni

invarianti

lineari \rightarrow a coeffic. dipend. dal t

2) **tipo di equazioni**

non lineari

2- livello: **identificazione** dei coefficienti nelle equazioni del S regolare

2.1) caso lineare invariante: **F, G, H** ?

2.2) « non lineare, invar, autonomo

(Es: **LOTKA-VOLTERRA** logistico
 $E, m, \sigma, \alpha, \beta$?)

90-06

Analisi della **stabilità** di una **soluzione** rispetto a ---
 della **sensibilità** di un **modello** a variazioni in ---
 dell' **incertezza** nella **soluzione** dovuta a ---

H_{p.1}: **modello** = { ODE o PDE ; ulteriori condizioni }

H_{p.2} **Problema** ben posto riguardo a **esistenza & unicità** della soluzione
 ↳ condizioni ai limiti oppure
 ↳ condizioni iniziali e/o
 ↳ condizioni al contorno

Obiettivo **Determinare esattamente** oppure **stimare** come la **soluzione** dipenda dai { **dati** ; **parametri** }

Strategie (possibili) di **soluzione**

* Stime di **stabilità** - contesto **DETERMINISTICO**

soluzione nominale o "di riferimento" (reference solution) dovuta a { **dati** ; **parametri** } "di riferimento"

soluzione variata dovuta a { **dati** ; **parametri** } **variati** o **disturbati** o "rumorosi"

NESSUNA IPOTESI sulle **cause** della variazione o del disturbo
 Il **dato** (o il **parametro**) **variato** può essere la **realizzazione** di un **processo stocastico**, purché **conforme** alle **H_p** del THM di 3!

* **Analisi di sensibilità** → **finita**
 ↳ **differenziale**

A. s. **finita**: equazione del **defetto** (defect equation) → stime di **stabilità**

A. s. **differenziale**: variazioni **infinitesime**

THM. del DINI (funzioni implicite) ↳ **linearizzazione** ↳ **stabilità** vs. Amplificazione dei disturbi

* **Analisi dell'incertezza**

contesto **PROBABILISTICO**
 dati, parametri, soluzione: realizzazioni di **processi stocastici**
 analisi delle **probabilità congiunte** → **simulazioni condizionate**

Stima di stabilità e tipi di dipendenza continua

DEF stimare la **stabilità** di una **soluzione** rispetto a un **parametro** $\hat{=}$ dimostrare la **dipendenza continua** della soluzione rispetto al parametro

ESEMPIO parametro a } funzioni scalari di una variabile.
soluzione x }

H_1 \exists e $\exists!$ di x siano enunciate in uno spazio (vettoriale normato) X munito della norma $\|\cdot\|_X$, qualora $a \in A \subseteq P$, dove A è un sottoinsieme (non necessariamente un sottospazio) dello spazio (vettoriale, normato) P munito della norma $\|\cdot\|_P$.

Stimare la **stabilità** della soluzione $x_0 \in X$, ossia di $x_0[a_0]$, ottenuta in corrispondenza del parametro $a_0 \in A$ significa:

- 1) l'implicazione $\forall \varepsilon > 0$ trovare $\delta[x_0, \varepsilon] > 0$ tale da far valere
- $$\|a - a_0\|_P < \delta \Rightarrow \|x - x_0\|_X < \varepsilon, \text{ dove } x := x[a];$$

questo è il tipo più generico di **dipendenza continua** ove **NON** si stabilisce **ALCUNA** relazione fra $\|a - a_0\|_P$ e $\|x[a] - x_0\|_X$;

- 2) oppure, in una situazione più favorevole, trovare una "costante", $C > 0$ (meglio, una **costante** che **NON** dipenda da $a_0, a, x_0, x[a]$) tale che

$$\|x[a] - x_0\|_X \leq C \|a - a_0\|_P;$$

in questo caso si ha una **dipendenza continua** di $x[\cdot]$ rispetto ad a del tipo di **LIPSCHITZ**.

Biblioteca Biblioteca Biblioteca Biblioteca Biblioteca Biblioteca Biblioteca Biblioteca
Quadrelli Quadrelli Quadrelli Quadrelli Quadrelli Quadrelli Quadrelli Quadrelli
Crosta Crosta Crosta Crosta Crosta Crosta Crosta Crosta

Ulteriori tipi di dipendenza continua:

La continuità HÖLDERiana e la continuità logaritmica

DEF (continuità HÖLDERiana)

$\exists C > 0$ (come sopra) ed un esponente α , $0 < \alpha \leq 1$,
tali che

$$\|x[a] - x_0\|_y < C \|a - a_0\|_p^\alpha$$

OSS il caso $\alpha = 1$ corrisponde alla continuità del tipo di
LIPSCHITZ.

DEF (continuità logaritmica)

Zuadrelli

Crasta