La dynamique des corps solides de d'Alembert à Poisson

Franco MAGRI

Au début du dix-septième siècle, la découverte par Kepler des lois du mouvement des planètes, conçues comme des points matériels sans dimensions, avait ouvert la voie à la mécanique de Newton. Un siècle plus tard, la découverte que la Terre et la Lune étaient animées par d'imperceptibles oscillations autour de leur centre donnera naissance à la dynamique des corps solides. Ainsi semble-t-il souhaitable de commencer l'histoire de la mécanique au dix-huitième siècle par le rappel de la découverte de ces nouveaux phénomènes astronomiques.

Le mouvement de l'axe de la terre

La découverte de la nutation de l'axe de la Terre est due à l'astronome anglais James Bradley. En 1727, il commence une série d'observations très soigneuses de la déclinaison d'un groupe d'étoiles qui se trouvent près de la colure solsticiale, dans le zodiaque. L'utilisation de deux nouveaux cadrans de haute précision lui permet de remarquer, en 1736, que « some of the stars near the solsticial colure had altered their declination 18" less, since the year 1727, than they ought to have from a precession of 50" »[1].

Cette observation signale une diminution de l'inclinaison du plan de l'équateur sur l'écliptique supposée fixe. Au début Bradley pense à une variation séculaire de l'obliquité de l'écliptique, mais il se rend compte que la diminution qu'il avait mesurée était trop rapide. Il se rend aussi compte que cette variation est corrélée à la variation de

[1] J. Bradley, A letter to the right honourable George Earl of Macclesfield concerning an apparent motion observed in some of the fixed stars, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 45, n° 485 (1747), p. 14.

l'inclinaison de l'orbite de la Lune sur le plan de l'équateur. En effet cette inclinaison était maximale en 1727, au début des observations, et minimale en 1736, à la fin des observations. Cette coïncidence lui suggère qu'une partie, au moins, de la variation de la déclinaison des étoiles pourrait être due à la Lune. Dans une lettre à Maupertuis, datée du 27 octobre 1737, Bradley affirme :

> I now conceive it to arise from the unequal action of the Moon upon the equatorial parts of the Earth, which, varying on account of the different inclination of her orbit to the equator, will cause a small nutation of the Earth's axis, as also an acceleration and retardation in the precession of the equinoxes. The whole quantity of this nutation, I find, amounts about 9" each way from the mean, the obliquity of the ecliptic being greatest when the Moon's ascending node is in Aries, and the least when in Libra [...] The same cause must also produce an inequality in the precession of the equinoxes, making the greatest annual precession about 57", and the least about 42".

Pour vérifier sa conjecture, Bradley poursuit les observations jusqu'en 1746, lorsque le nœud ascendant de la Lune est à nouveau confondu avec l'équinoxe de printemps. La découverte de la nutation de l'axe de la Terre est annoncée à la Royal Society le 14 février 1748. De ce moment un nouveau défi est posé aux savants de l'époque : expliquer les mouvements de l'axe de la Terre dans le cadre de la théorie de la gravitation de Newton, en admettant que la Terre soit un sphéroïde légèrement aplati aux pôles, assujetti à l'attraction simultanée du Soleil et de la Lune.

Jean d'Alembert est le premier à relever le défi posé par les découvertes de Bradley. Après quelques mois de travail intense, il termine ses *Recherches sur la précession des équinoxes et sur la nutation de l'axe de la Terre*, qu'il soumet à l'Académie des Sciences de Paris le 17 mai 1749. L'ouvrage est imprimé le 17 juillet de la même année, après le rapport favorable écrit par Clairaut et Montigny. Dans les *Recherches* sont écrites, pour la première fois, les équations différentielles du second ordre que doivent satisfaire les angles qui décrivent le mouvement de l'axe de la Terre par rapport à l'écliptique[2]. Ce résultat remarquable vient après trois chapitres de calculs difficiles. Le style d'écriture de d'Alembert, et sa façon d'évaluer la vitesse et l'accélération des points de la Terre, fondée sur de longues constructions géométriques, semblent conçus pour gêner le lecteur. De plus, le choix d'un repère de référence astronomique, mobile tant par rapport à la Terre que par rapport à l'écliptique, ne fait qu'étendre les difficultés du lecteur. Ce manque de clarté explique pourquoi les *Recherches* de d'Alembert ont eu une réussite incertaine, et ont été rapidement oubliées dans les traités de mécanique. Elles restent cependant le point de départ obligé de chaque histoire de la mécanique des corps solides au milieu du dix-huitième siècle. Nous en parlerons plus en détail ci-après.

[2] *Recherches sur la précession des équinoxes et sur la nutation de l'axe de la terre dans le système newtonien*, Paris, David l'aîné, 1749 ; *Œuvres complètes*, série I, vol. 7, 2006, p. 120.

Un nouveau principe de dynamique

Un nouveau départ de l'étude du mouvement des corps solides aura lieu quelques mois après grâce à Euler. Dès sa jeunesse Euler avait conçu le projet d'écrire un grand traité de mécanique pour aborder tous les problèmes de cette science par les méthodes nouvelles de l'analyse. Ce traité devait se composer de plusieurs livres. Dans la *Mechanica sive motus scientia analytice exposita*[3], Euler dressait une liste de six livres :

> Nous considérerons d'abord des corps infiniment petits, c'est-à-dire tels qu'ils puissent être assimilés à des points. Ensuite nous passerons aux corps de dimension finie, qui sont rigides et dont la forme ne peut être modifiée. En troisième lieu, nous traiterons les corps flexibles. En quatrième lieu, ceux qui admettent des extensions et des contractions. Cinquièmement, nous examinerons le mouvement de plusieurs corps distincts, dont certains empêchent les autres de poursuivre le mouvement qu'ils pourraient avoir sans l'influence des premiers. Sixièmement enfin, il s'agira du mouvement des fluides[4].

Ce plan s'était, toutefois, arrêté après le premier livre à cause d'une difficulté qui semblait insurmontable : le manque des principes dont on avait besoin. Comme le même Euler expliquait quelques années après,

> Dès que l'axe de rotation ne demeure plus le même, et que les pôles, autour desquels le corps tourne, changent eux-mêmes, alors les principes de Mécanique connus jusqu'ici ne sont plus suffisants à déterminer ce mouvement. Il s'agit donc de trouver et d'établir de nouveaux principes qui soient propres à ce dessein[5].

Cette difficulté sera surmontée par Euler dans les années 1749-1751, sous l'influence des *Recherches* de d'Alembert. Une copie de ce traité est reçue par Euler pendant l'été 1749, et déjà au mois de mars 1750 il lit un mémoire du même titre à l'Académie des

[3] Saint-Pétersbourg, Imprimerie de l'Académie des Sciences, 1736 ; *Opera Omnia*, série II, vol. 1.

[4] « Primo enim contemplabimur corpora inifnite parva seu quae tanquam puncta spectari possunt. Deinde corpora finitae magnitudinis aggrediemur ea, quae sunt rigida neque figuram suam mutari patiuntur. Tertio agemus de corporibus flexibilibus. Quarto de iis quae extensionem et contractionem admittunt. Quinto plurium corporum solutorum motus examini subiieciemus, quorum alia impediunt, quin motus suos possint, ut conantur, absolvere. Sexto vero de motu fluidorum erit agendum », *Mechanica*, vol. 1, chapitre 1, paragraphe 98. Ce texte est traduit en anglais dans *Euler and Modern Science*, N.N. Bogolyubov, G.K. Mikhailov et A.P. Yushkevich, éds., Providence, RI, The Mathematical Association of America, 2007, p. 169 (avec une référence erronée à l'introduction de la *Mechanica*).

[5] Découverte d'un nouveau principe de mécanique, présenté le 3 septembre 1750, *Mémoires de l'Académie de Berlin*, 6 (1750), 1752, p. 199 ; *Opera Omnia*, série II, vol. 5, p. 84.

Jean le Rond d'Alembert (1717–1783)
DR

Sciences de Berlin. Dans ce mémoire il n'est fait aucune référence à d'Alembert et celui-ci demande des explications. Dans une lettre du 7 mars 1750, Euler explique quelle avait été sa réaction à la lecture du traité de d'Alembert :

> Depuis longtems je me suis appliqué à diverses reprises à ce Problème, mais j'en ai toujours été rebuté, tant par le grand nombre de circonstances aux-

> quelles il faut avoir égard, que principalement par ce Problème : *un corps tournant sur un axe quelconque libre, et etant sollicité par une force oblique, trouver le changement causé tant dans l'axe de rotation même que dans le mouvement*, dont la solution est absolument requise à ce sujet que vous avez si heureusement developpé. Or par rapport à ce probleme toutes mes recherches ont été inutiles jusqu'ici, et je ne m'y serois plus appliqué, si je n'avois pas vû que la solution devoit être necessairement renfermée dans votre traité, quoique je ne l'y aye pas pu decouvrir, ce qui a augmenté d'abord d'autant plus le desir de developper toute votre methode ; mais il faut que j'avoüe aussi que je n'ai pu vous suivre dans les propositions preliminaires dont vous vous servez, votre methode de conduire le calcul ne m'etant pas encore assez familière... mais depuis que j'ay reussi mieux dans la recherche de ce même sujet, ayant été soutenu par quelques lumières de votre ouvrage dont je me suis éclairci peu à peu, j'ai été en etat de mieux juger de vos excellentes conclusions[6].

Dans cette lettre, ainsi que dans ses écrits successifs, Euler reconnaît la priorité de d'Alembert dans la solution du problème de la précession et de la nutation de l'axe terrestre, mais il revendique en même temps sa propre originalité dans l'étude du mouvement des corps rigides en général. En effet, le « nouveau principe » introduit par Euler en 1750 est de nature différente du principe de d'Alembert, puisqu'il met au centre du discours les forces internes, tandis que d'Alembert s'occupait des forces de contraintes. Dans le cas des corps solides les deux types de forces coïncident, et donc les deux principes sont valables en même temps. Mais en général ils répondent à des façons différentes d'aborder les problèmes de mécanique. L'approche d'Euler s'est révélée bien plus puissante que celle de d'Alembert, servant de fondement aussi pour la mécanique des corps déformables et des fluides. De plus Euler maîtrise parfaitement la cinématique du corps solide et le concept de vitesse angulaire. Il écrit toujours les équations du mouvement d'un corps solide qui tourne autour d'un point fixe ou de son centre d'inertie sous la forme d'un système de six équations différentielles du premier ordre. Trois équations déterminent les composantes de la vitesse angulaire sur trois axes convenablement choisis. Les trois autres permettent ensuite de reconstruire le mouvement du corps solide à partir de la connaissance de sa vitesse angulaire. Cette façon de partager le problème en deux parties donne à l'approche d'Euler une souplesse que n'avait pas celle de d'Alembert.

La découverte des équations de la dynamique des corps solides coûte à Euler beaucoup de temps et beaucoup d'efforts. Il arrive à la forme finale des « équations d'Euler » en trois pas successifs. La route est ouverte en 1750, avec la « Découverte d'un nouveau principe de dynamique ».

[6]Euler, *Opera Omnia*, série IV A, vol. 5, p. 306. Cité dans C. Wilson, D'Alembert versus Euler on the precession of the equinoxes and the mechanics of rigid bodies, *Archive for History of Exact Sciences*, 37 (1987), p. 235.

Dans ce mémoire, Euler, après avoir expliqué le nouveau principe, évalue le champ des vitesses et des accélérations du corps solide par des méthodes empruntées à la cinématique des fluides. L'introduction de l'expression du champ des accélérations dans le principe le conduit à une première forme des équations du mouvement. Cette forme est remarquable par sa symétrie et son élégance, mais encore trop compliquée pour les applications. L'origine des difficultés est reliée au choix du repère de référence. Pour mettre en équations son nouveau principe, Euler choisit assez naturellement un repère d'axes cartésiens fixes dans l'espace. Ce choix entraîne que les coefficients des équations différentielles du mouvement sont variables avec le temps. Ils ont, en effet, la signification de moments d'inertie du corps solide par rapport aux axes fixes, et ils changent donc avec la position du corps. Pour remédier à cet inconvénient, l'année suivante Euler a l'idée d'introduire aussi un trièdre d'axes orthogonaux solidaires du corps qui tourne. Le passage du trièdre fixe au trièdre mobile est assez compliqué à une époque où le calcul vectoriel était loin d'être inventé. Dans le mémoire « Du mouvement d'un corps solide quelconque lorsqu'il tourne autour d'un axe mobile », présenté à l'Académie des Sciences de Berlin le 7 octobre 1751, Euler est plusieurs fois sur le point de s'égarer. Pour décrire le mouvement des axes mobiles il introduit les angles d'Euler, dont il se sert pour calculer les composantes de l'accélération des points du corps solide par rapport aux mêmes axes. Le résultat du calcul est très compliqué, et ne diffère pas beaucoup du résultat obtenu deux ans avant par d'Alembert. En répétant à peu près les raisonnements faits dans la « Découverte », Euler obtient une nouvelle forme des équations du mouvement du corps solide, écrites comme un système de trois équations différentielles du second ordre sur les angles d'Euler, à la manière de d'Alembert.

Jusqu'ici le nouveau mémoire est un pas en arrière par rapport à la « Découverte ». Mais l'expérience de la « Découverte » suggère à Euler comment sortir de la difficulté. La clé est encore une fois le concept de vitesse angulaire. Euler est capable de calculer les composantes de la vitesse angulaire sur les axes mobiles en fonction des angle d'Euler. Il se rend ainsi compte qu'il est possible de faire disparaître les angles d'Euler des équations du mouvement, en les remplaçant partout par les nouvelles composantes de la vitesse angulaire. Le résultat est étonnant. Les nouvelles équations ont la même structure, la même symétrie et la même élégance que les équations trouvées dans la « Découverte », sauf que les coefficients des équations sont à présent constants et non plus variables dans le temps. Par cette voie aventureuse, à la fin de l'« Axe mobile » Euler aboutit aux célèbres équations du mouvement d'un corps solide qui portent son nom. Il revient sur ces équations sept ans plus tard, pour deux bonnes raisons. Avant tout, dans le mémoire « Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe variable », il est possible de donner une démonstration d'une simplicité désarmante des nouvelles équations, condamnant ainsi à l'oubli le pénible travail de 1751.

Nous en parlerons dans la troisième section, dédiée aux équations d'Euler. En outre il peut tirer profit de la découverte des axes principaux d'inertie, faite en 1755 par son collègue Johann Andreas von Segner, pour donner aux équations du mouvement toute la simplicité désirable. En 1758 les équations d'Euler sont établies comme paradigme de la nouvelle mécanique, dans la forme qu'on utilise encore aujourd'hui. 1758 est donc la seconde date importante de notre histoire, après celle de son début en 1749.

Les travaux successifs d'Euler sur la dynamique du corps solide servent à éclaircir quelques points de la théorie, et à lui donner une forme plus systématique. Le livre *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum*, terminé en 1760 mais publié seulement en 1765[7], est la somme de la pensée d'Euler sur la dynamique des corps rigides, où n'importe quelle question relative au mouvement de ces corps est traitée sous forme d'une suite de problèmes résolus. Ce livre complète le programme d'un grand traité de mécanique que le jeune Euler avait énoncé en 1736 dans sa *Mechanica*. L'autre travail important de sa vieillesse est le mémoire « Nova methodus corporum rigidorum determinandi », présenté à l'Académie de Saint-Pétersbourg en 1775. Dans ce travail Euler aborde l'étude des rotations finies d'un corps rigide, et calcule la matrice orthogonale de rotation en fonction des paramètres de l'axe de rotation et de l'angle de rotation. Il ouvre ainsi la voie qui, à travers les travaux de Olinde Rodrigues et de Hamilton, conduira à la découverte des paramètres de Cayley-Klein. Mais ce travail est remarquable aussi parce que Euler écrit ici explicitement, pour la première fois, les six équations du mouvement d'un corps arbitraire, sous la forme d'équations de bilan de la quantité de mouvement et du moment angulaire. Après avoir montré comment calculer les composantes de l'accélération de chaque particule du corps par rapport à trois axes fixes dans l'espace, qu'il appelle IA, IB, IC, il se pose le problème de trouver les « Formules generales pro motu corporum rigidorum a viribus quibuscumque sollicitatorum » et il affirme :

> Quodsi nunc simili modo omnes vires, quibus corpus hoc tempore sollicitatur, etiam secundum istas ternas directiones resolvantur, atque ex omnibus coniunctis pro directionibus IA, IB, IC vires oriantur P, Q et R, per principia motus necesse est, ut istae vires aequantur summis omnium virium acceleratricium, quae ex omnibus corporis elementis dM iunctim sumtis nascuntur [...] Praeterea vero etiam omnia momenta virium acceleratricium respectu ternorum axium fixorum simul sumta aequari debent momentis, quae ex omnibus viribus sollicitantibus respectu eorundem axium deducuntur [...] Hac igitur ratione sex nacti sumus aequationes, quas hic coniunctim conspectui exponamus

[7] Rostock et Greifswald, A.F. Röse, 1765 ; *Opera Omnia*, série II, vol. 3 et 4.

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{I} & \displaystyle\int dM\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)=iP \\
\mathrm{II} & \displaystyle\int dM\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)=iQ \\
\mathrm{III} & \displaystyle\int dM\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)=iR \\
\mathrm{IV} & \displaystyle\int z\,dM\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)-\int y\,dM\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)=iS \\
\mathrm{V} & \displaystyle\int x\,dM\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)-\int z\,dM\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)=iT \\
\mathrm{VI} & \displaystyle\int y\,dM\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)-\int x\,dM\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)=iU\,.
\end{array}
$$

> In quibus formulis integralibus solae litterae maiusculae X, Y et Z pro variabilibus habentur, dum contra in formulis differentialibus solae quantitates a tempore t pendentes tanquam variabiles spectantur[8].

Ces équations se détachent sur le fond de l'histoire de la mécanique au dix-huitième siècle comme témoignage impérissable de l'œuvre d'Euler dans la dynamique des corps rigides.

La libration de la lune

Seul Lagrange, quelques années après, aura le privilège d'ouvrir une voie différente, capable de rivaliser avec celle choisie par Euler. Au début des années soixante, l'attention du jeune Lagrange avait été attirée par un autre phénomène de grand intérêt pour les astronomes du dix-huitième siècle : la libration de la Lune. Dans l'introduction du second des deux mémoires qu'il dédie à l'étude de ce phénomène, Lagrange fait un petit abrégé historique de la découverte de ce phénomène. Il écrit :

> C'est un phénomène reconnu depuis longtemps que la Lune présente toujours la même face ; mais ce n'est que depuis l'invention des lunettes qu'on a pu déterminer les lois de la Libration, c'est-à-dire de ces balancements que la Lune paraît faire autour de son centre, et par lesquels, dans le cours de chaque mois, elle nous cache et nous découvre alternativement, vers ses bords, quelques parties de sa surface. Galilée est le premier qui a observé la Libration, mais il paraît n'en avoir bien connu qu'une partie, celle qui se fait perpendiculairement à l'écliptique, et qu'on nomme libration en latitude. Hévélius découvrit ensuite la libration en longitude : mais il a été

[8] Nova methodus motum corporum rigidorum determinandi, *Novi commentarii Academiæ Scientiarum Petropolitanæ* (1775), 20, 1776, p. 222–225 ; *Opera Omnia*, série II, vol. 9, p. 112–113.

> réservé à Dominique Cassini de donner une explication générale et complète de ce phénomène[9].

Les observations des taches de la Lune, faites pendant les années 1748 et 1749 par l'astronome allemand Johann-Tobias Mayer, montraient que le plan de l'équateur lunaire est incliné sur le plan de l'écliptique de $1°29'$ et que l'intersection de ces deux plans est toujours à peu près parallèle à la ligne des nœuds moyenne de l'orbite de la Lune. Cela signifie que la Lune tourne sur l'axe de son équateur, d'occident en orient, de manière que chaque point de son équateur revient au point équinoxial lunaire dans le même temps qu'il faut à la Lune pour revenir au nœud ascendant. De l'avis de Lagrange :

> L'accord des nœuds de l'équateur de la Lune avec ceux de son orbite, et l'égalité entre la révolution de l'équateur de la Lune par rapport à ses nœuds et la révolution de cette Planète dans son orbite par rapport aux nœuds de cette orbite, sont peut-être les phénomènes les plus singuliers du système du monde[10].

Jean d'Alembert, encore une fois, avait été le premier à s'occuper « de la théorie physique de la Libration de la Lune, en appliquant à cette Planète les formules qu'il avait données pour la Terre »[11], mais ses résultats étaient peu conformes aux observations. Pour cette raison Lagrange, dans ses « Recherches sur la libration de la Lune », présentées à l'Académie des Sciences de Paris en 1763, essayait de suppléer à la théorie de d'Alembert, en donnant une explication tout à fait satisfaisante de l'égalité des périodes des mouvements moyens de translation et de rotation de la Lune, qui entraîne que cette planète nous présente toujours la même face. Mais il n'avait pas réussi à donner une explication satisfaisante de l'égalité entre le mouvement des nœuds de l'équateur lunaire et celui des nœuds de l'orbite de la Lune sur l'écliptique. Il reviendra sur cette question seize ans après, dans sa « Théorie de la libration de la Lune », présentée à l'Académie des Sciences de Berlin en 1780.

Ces deux mémoires sont célèbres parce qu'ils ont donné l'occasion à Lagrange de découvrir la forme générale des équations du mouvement des systèmes de corps indéformables où « certains empêchent aux autres de poursuivre leurs mouvements comme ils auraient eu tendance à faire par eux-mêmes », comme le disait Euler. En 1763 Lagrange a l'idée de joindre le principe de d'Alembert au principe des travaux virtuels de la statique pour obtenir ce qu'il appelle l'« équation générale » de la dynamique, d'où découlent les équations de Lagrange. En 1780 Lagrange transforme l'équation générale en celle qui sera appelée par Hamel, au début du vingtième siècle, l'« équation centrale » de la dynamique. Lagrange présente le passage de l'équation générale à l'équation centrale comme un simple procédé de calcul, sans se rendre compte, apparemment, de la signification profonde du changement qu'il est en train

[9] Théorie de la libration de la Lune, et des autres phénomènes qui dépendent de la figure non sphérique de cette planète, *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin*, 1780, p. 203 ; *Œuvres*, vol. 5, p. 5.

[10] *Ibid.*, p. 205 ; *Œuvres*, vol. 5, p. 7.

[11] *Ibid.*, p. 207 ; *Œuvres*, vol. 5, p. 9.

d'introduire. L'histoire de la mécanique nous permet de regarder le procédé de calcul de Lagrange comme la méthode brillante que Lagrange dévoile pour faire usage des formes différentielles (sur le fibré tangent de l'espace de configuration) dans l'écriture des équations du mouvement de la dynamique. On pourrait soutenir que la publication de la « Théorie de la libration », en 1780, est la date de naissance de la mécanique hamiltonienne. L'équation centrale déborde des limites de la mécanique des corps solides. Nous l'étudierons en détail dans la quatrième section de ce texte, parce qu'elle servira à Lagrange, dans sa *Méchanique analitique* de 1788, à faire une première synthèse des équations du mouvement des corps rigides. Dans le livre VI de la *Méchanique analitique*, Lagrange montre comment obtenir, par une méthode uniforme, les équations de d'Alembert, celles d'Euler et les équations de Lagrange du corps rigide à partir de l'équation centrale. Les équations obtenues par Lagrange seront un peu généralisées par Poincaré en 1901, et seront dès lors connues sous le nom d'équations d'Euler-Poincaré. Il est intéressant de remarquer que les équations d'Euler-Poincaré se trouvent déjà dans la *Méchanique analitique* de Lagrange.

À la synthèse de Lagrange s'opposera, quelques années après, une autre synthèse des équations du mouvement des corps solides due à Poisson. Son *Traité de mécanique*, paru à Paris en 1811 puis, dans une nouvelle édition, en 1833, eut une large diffusion et fut, pour longtemps, un texte de référence important pour les études de mécanique. Même s'il a été écrit dans les années où la figure de Lagrange était dominante, le traité de Poisson s'éloigne nettement de la *Méchanique analitique* de Lagrange par son style et sa méthode de présentation. L'esprit du traité est bien décrit par Poisson au chapitre IX du livre quatrième, où il écrit :

> [Si Lagrange] a réduit à un procédé uniforme les solutions de tous les problèmes de Mécanique, ou du moins la formation des équations différentielles dont ils dépendent, [...] l'ordre qui a été suivi dans ce Traité, où l'on a résolu directement les problèmes relatifs aux corps solides et aux corps flexibles, en allant du plus simple au plus composé, a paru plus propre à une étude approfondie de la Mécanique et à l'enseignement de cette science, que l'on ne doit pas considérer seulement sous un point de vue abstrait et indépendant des circonstances physiques[12].

Cette exigence de réalisme lui suggère de revenir à Euler. La présentation des principes de la mécanique suivi dans le *Traité* de 1833 est assez graduée. Au début Poisson semble accepter le point de vue de d'Alembert, dans le chapitre sur le mouvement d'un corps solide où il doit traiter de forces de contraintes. Il parle aussi rapidement de la méthode des multiplicateurs de Lagrange, sans faire aucune référence aux équations de Lagrange. Mais quand il s'intéresse à la dynamique d'un système arbitraire de corps, assimilés à des amas de points matériels selon le point de vue de la physique moléculaire, il devient plutôt eulérien. Avec l'intention de donner une base plus intuitive aux axiomes d'Euler, au chapitre IX du Livre quatrième, Poisson introduit explicitement l'hypothèse que les forces intérieures satisfassent au principe de l'action

[12]S.-D. Poisson, *Traité de mécanique*, 2[e] édition, Paris, Bachelier, 1833, p. 393.

et de la réaction, et de là il déduit les principes de la quantité de mouvement et du moment angulaire à partir des équations de Newton. Euler avait d'autres opinions à cet égard, et il n'avait jamais accepté le modèle d'interaction newtonienne dans le cas des corps continus. Dans la *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum*, Euler formulait, au contraire, l'opinion que les actions entre les différentes parties devraient être décrites comme dans les fluides, mais il admettait aussi que rien n'était certain dans ce domaine. En tout cas, la présentation de Poisson eut une grande influence et a bien contribué à répandre les idées d'Euler. Poisson a aussi le mérite d'avoir mis au point la théorie du trièdre mobile, pour en faire un usage sagace dans le calcul des champs des vitesses et des accélérations des points d'un corps rigide. Son travail de clarification a contribué à simplifier et à abréger les calculs d'Euler, en les rendant plus intelligibles aux générations suivantes. On peut même dire que Poisson a pavé la voie à la formulation vectorielle de la mécanique, conçue comme opposée au point de vue abstrait de Lagrange. Encore aujourd'hui la plupart des livres de mécanique présentent la dynamique des corps rigides suivant les idées d'Euler mais dans la forme de Poisson. Nous traitons le dualisme entre les points de vue de Poisson et de Lagrange dans le dernier paragraphe de notre étude.

Les équations de d'Alembert

Jean d'Alembert est le premier qui a réussi à donner une explication mathématique convaincante de la précession et de la nutation de l'axe terrestre, dans le cadre de la gravitation newtonienne. Sa méthode est plutôt compliquée mais géniale et assez surprenante aux yeux d'un lecteur moderne. D'Alembert réduit l'étude du mouvement de l'axe terrestre à un problème d'équilibre de la Terre sous l'action de cinq forces. Le but de cette section est d'expliquer l'esprit de la méthode de d'Alembert, et de justifier la forme des équations du mouvement de l'axe terrestre qu'il obtient. L'étude des trois premiers chapitres des *Recherches* poursuivie dans ce paragraphe nous permettra de mieux évaluer ensuite l'originalité et la profondeur des idées développées par Euler et Lagrange sur le même problème.

En changeant un peu l'ordre de présentation de d'Alembert, nous considérons d'abord le problème du calcul des accélérations des points de la Terre. Pour découpler le mouvement de rotation autour du centre de la Terre du mouvement progressif du centre sur l'écliptique, d'Alembert introduit un repère cartésien mobile ξ, η, ζ dont l'origine est le centre C de la Terre. L'axe ζ est perpendiculaire au plan de l'écliptique, et l'axe ξ est choisi de façon que le plan $\xi\zeta$ contienne l'axe terrestre. L'inclinaison de ce dernier axe sur l'axe ξ est dénotée par d'Alembert par la lettre τ. Notons explicitement que le repère ξ, η, ζ, que nous appellerons dorénavant repère astronomique, est mobile tant par rapport à l'écliptique que par rapport à la Terre. Ces deux mouvements sont paramétrés par deux angles, dénotés par les lettres ε et P par d'Alembert. L'angle ε mesure la précession du repère astronomique dans le plan de l'écliptique autour de l'axe ζ, compté en sens horaire à partir d'un plan de référence fixe passant par l'axe ζ. L'angle P est l'angle horaire de la Terre par rapport au repère astronomique. Il s'agit de l'angle que le premier méridien de la Terre forme avec le plan $\xi\zeta$, compté positivement en sens horaire. L'angle horaire X d'un point arbitraire G de la Terre sera donc égal à l'angle horaire P augmenté de la longitude constante de G, mesurée à partir du premier méridien terrestre. Si, suivant d'Alembert, on indique par f la distance de G à l'axe terrestre, et par $a-b$ sa hauteur sur le plan équatorial, on trouve que le vecteur position du point G par rapport au centre de la Terre est donné par le vecteur

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CG} =& \Big[f\cos X\sin\tau + (a-b)\cos\tau\Big]\,\vec{e}_\xi + f\sin X\,\vec{e}_\eta \\ &+ \Big[-f\cos X\cos\tau + (a-b)\sin\tau\Big]\,\vec{e}_\zeta\ .\end{aligned}$$

Pour calculer l'accélération relative du point G par rapport au centre C de la Terre, on doit dériver deux fois cette expression par rapport au temps, en tenant compte de la variabilité des coordonnées (X,τ) et des vecteurs du repère astronomique. En utilisant les équations du mouvement,

$$\frac{d\vec{e}_\xi}{dt} = \dot\varepsilon\,\vec{e}_\eta \quad , \quad \frac{d\vec{e}_\eta}{dt} = -\dot\varepsilon\,\vec{e}_\xi \quad , \quad \frac{d\vec{e}_\zeta}{dt} = 0\ ,$$

il est aisé de trouver les composantes de l'accélération du point G sur les axes mobiles. On obtient ainsi les formules, assez compliquées,

$$\begin{aligned}\alpha'' dt =& -f\cos X \times d\left(\frac{ydy}{\sqrt{1-yy}}\right) + \frac{f\,dP\cdot ydy\sin X}{\sqrt{1-yy}} \\ &- ddy(a-b) - f\,dd\varepsilon \times \sin X - f\,d\varepsilon\,dP\cos X \\ &- f\,ddP\sin X\sqrt{1-yy} - f\,dP^2\cos X\sqrt{1-yy} \\ &+ \frac{f\cdot\sin X\cdot dP\cdot ydy}{\sqrt{1-yy}} + yd\varepsilon^2\times(a-b) \\ &- f\,d\varepsilon^2\cos X\sqrt{1-yy} - f\,dP\,d\varepsilon\cos X\ ;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta'' dt =& \frac{2f\,d\varepsilon\cdot ydy\cdot\cos X}{\sqrt{1-yy}} + dy\,d\varepsilon(a-b) \\ &+ f\,d\varepsilon^2\sin X + f\,dP\,d\varepsilon\sin X\sqrt{1-yy} \\ &+ ydd\varepsilon\times(a-b) + d\varepsilon\,dy(a-b) \\ &- f\,dd\varepsilon\cos X\sqrt{1-yy} + f\,d\varepsilon\,dP\sin X\sqrt{1-yy} \\ &- f\,ddP\cos X + f\,dP^2\times\sin X\ ;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega'' dt = &- f\, ddy \cos X + 2f\, dy\, dP \sin X \\ &+ fyddP \sin X + (a-b) \times d\left(\frac{ydy}{\sqrt{1-yy}}\right) \\ &+ fydP^2 \cos X\ ,\end{aligned}$$

données par d'Alembert au début du troisième chapitre des *Recherches*. Pour interpréter correctement ces formules, on doit se rappeler que les grandeurs $(\alpha'', \beta'', \omega'')$ sont les accroissements infinitésimaux des vitesses. Cela signifie qu'elles sont reliées aux composantes (a_ξ, a_η, a_ζ) de l'accélération du point G par les formules :

$$\alpha'' = a_\xi dt \qquad \beta'' = a_\eta dt \qquad \omega'' = a_\zeta dt\ .$$

On doit ici remarquer la sagacité avec laquelle d'Alembert conduit ce long calcul, en utilisant seulement d'ingénieuses constructions géométriques au lieu du calcul différentiel et de la méthode du repère mobile dont il ne pouvait faire usage.

Pour écrire les équations de mouvement de l'axe de la Terre, d'Alembert invoque le principe général qu'il avait introduit dans son *Traité de Dynamique* en 1743, qu'il énonce à présent sous la forme :

> Soit un corps qui se meuve d'un mouvement quelconque, et dont toutes les parties aient chacune une vitesse différente, représentée par l'indéterminée u dans un instant quelconque. Soient aussi tant de forces accélératrices qu'on voudra, ψ, ψ', etc., qui agissent sur ce corps, et en vertu desquelles la vitesse u que la partie a dans un instant quelconque, soit changée l'instant suivant en une autre vitesse u', différente pour chaque partie. Je dis que si on regarde la vitesse u comme composée de la vitesse u' et d'une autre vitesse u'', qui est infiniment petite, le système de toutes les parties du corps, animées chacune de la vitesse u'' doit être en équilibre avec les forces ψ, ψ', etc.[13]

Pour appliquer ce principe, d'Alembert fait un usage subtil de la théorie de l'équivalence des forces agissant sur un corps solide. On sait qu'il est permis de faire glisser une force le long de la droite qu'elle définit et de composer, par la règle du parallélogramme, plusieurs forces qui sont appliquées au même point. Ces opérations élémentaires permettent à d'Alembert de simplifier remarquablement le système de forces agissant sur la Terre. Il considère séparément les forces d'attraction exercées par le Soleil et par la Lune, et les forces d'inertie produites par le mouvement de la Terre. Elles sont définies comme produit de la masse de chaque partie par son accélération. Dans le premier chapitre des *Recherches*, d'Alembert réduit les forces d'attraction gravitationnelle à deux forces ψ et ψ', appliquées aux points A et A' de l'axe de la Terre, qui sont distants de L et L' du centre de la Terre respectivement. Il calcule aussi les composantes de ces deux forces sur les axes du repère astronomique,

[13] *Recherches*, p. 101.

obtenant les expressions,

$$\vec{F}_{\text{SOLEIL}} = \psi\Big(\cos v\,\vec{e}_\xi + \sin v\,\vec{e}_\eta\Big) \ ,$$
$$\vec{F}_{\text{LUNE}} = \psi'\Big(-\cos v'\,\vec{e}_\xi + \sin v'\,\vec{e}_\eta + p\,\vec{e}_\zeta\Big) \ ,$$

où v et v' sont les longitudes du Soleil et de la Lune dans le repère astronomique, et p est un paramètre qui tient compte de l'inclinaison de la lune sur le plan de l'écliptique.

Dans le deuxième chapitre des *Recherches*, d'Alembert fait la réduction des forces d'inertie. Puisque l'accélération de chaque partie de la Terre se décompose en trois composantes, chacune orthogonale à l'un des plans de coordonnées du repère astronomique, il voit le système des forces d'inertie comme la somme de trois systèmes de forces parallèles. Chacun d'entre eux peut être réduit à une seule force par les opérations élémentaires d'équivalence. Cette force est la résultante du système de forces parallèles, et son point d'application est calculé comme on le fait d'habitude pour le centre de gravité d'un corps pesant. Ainsi la résultante G des forces d'inertie associées à la composante α''/dt de l'accélération suivant l'axe ξ est donnée par l'équation[14],

$$G = MG' + \int \frac{\alpha''}{dt} dm \ ,$$

où G' est la composante suivant ξ de l'accélération du centre de la Terre. De même, les coordonnées (θ, χ) de son point d'application sur le plan de coordonnées (η, ζ) sont données par les équations

$$G \cdot \theta = \int \zeta \frac{\alpha''}{dt} dm$$
$$G \cdot \chi = \int \eta \frac{\alpha''}{dt} dm \ .$$

La même réduction est valable pour les deux autres composantes. Il s'ensuit que les forces d'inertie peuvent être réduites à trois forces, chacune orthogonale à l'un des plans de coordonnées du repère astronomique, appliquées à trois points bien déterminés de ces plans. Le principe de d'Alembert dit alors que la Terre doit se déplacer de telle façon que les cinq forces agissant sur la Terre se fassent équilibre à chaque instant.

Au moyen, encore, de la théorie de l'équivalence des forces, d'Alembert peut réduire les cinq forces à deux et obtenir six conditions d'équilibre. Trois conditions contiennent les composantes de l'accélération du centre de la Terre, et elles doivent être interprétées comme les équations du mouvement du centre sur l'écliptique. Les trois autres conditions contiennent seulement les composantes de l'accélération

[14] *Recherches*, p. 105.

relative des points de la Terre par rapport à son centre. Elles ont la forme assez compliquée,

$$\int \left(\eta \frac{\alpha''}{dt} - \frac{\omega''}{dt} \right) dm = \psi \cos v \cdot L\sqrt{1-y^2} + \psi'' \cos v' L' \sqrt{1-y^2} - \psi'' L' p y \ ,$$

$$\int \left(\frac{\beta''}{dt} - \frac{\alpha''}{dt} \right) dm = \psi \, L y \sin v + \psi'' L' y \sin v' \ ,$$

$$\int \left(\frac{\beta''}{dt} - \frac{\omega''}{dt} \right) dm = \psi \, L \sin v \sqrt{1-y^2} + \psi'' L' \sin v' \sqrt{1-y^2} \ ,$$

et apparaissent comme équations G, H, K à la page 108 des *Recherches.* Ici la lettre y dénote le cosinus de τ. Ces équations doivent être interprétées comme les équations différentielles du mouvement de rotation de la Terre autour de son centre. Nous les appellerons les équations de d'Alembert du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe. Personne ne se rappelle plus ces équations aujourd'hui, parce que, comme le dit Lagrange dans sa *Méchanique analitique*, « la forme de ces équations n'a pas toute la simplicité dont elles sont susceptibles ». L'histoire de la dynamique du corps solide après d'Alembert est l'histoire des changements de forme et de signification que ces équations ont subies entre les mains d'Euler et de Lagrange.

Les équations d'Euler

Euler consacre beaucoup d'efforts et beaucoup de travaux à comprendre la dynamique des corps solides en rotation autour d'un point fixe, et dans chaque travail il essaie d'aborder le problème sous des perspectives nouvelles. Ainsi il y a, chez Euler, une pluralité de façons d'écrire les équations du mouvement des corps solides.

Sous le nom d'équations d'Euler du corps rigide on entend d'habitude le système de six équations différentielles du premier ordre, partagé en deux groupes de trois équations chacun, qu'on écrit dans les notations de Lagrange

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - B)qr &= M_a \\ B\dot{q} + (A - C)pr &= M_b \\ C\dot{r} + (B - A)pq &= M_c \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} p &= \dot{\psi} \sin\theta \, \sin\varphi + \dot{\theta} \cos\varphi \\ q &= \dot{\psi} \sin\theta \, \cos\varphi - \dot{\theta} \sin\varphi \\ r &= \dot{\psi} \cos\theta + \dot{\varphi} \end{aligned}$$

où (p, q, r) sont les composantes de la vitesse angulaire du corps rigide par rapport aux axes principaux d'inertie, ici dénotés par les lettres (a, b, c) ; (A, B, C) sont les moments principaux d'inertie ; (ψ, θ, φ) sont les angles d'Euler des axes mobiles (a, b, c) par rapport aux axes fixes (x, y, z) ; (M_a, M_b, M_c) sont les composantes du moment des forces extérieures sur les axes principaux d'inertie.

L'histoire de ces équations est assez bizarre. Elles ont été écrites lors de deux périodes différentes, distantes de sept ans. En outre, pour arriver aux équations de mouvement projetées sur les axes mobiles, Euler a été obligé de passer par l'étude des équations du mouvement projetées sur les axes fixes. La présentation moderne selon laquelle les équations d'Euler forment une pièce unique, qui découle nécessairement du principe du moment angulaire est donc une faute historique. Le but de ce paragraphe est de reconstruire l'histoire de la découverte des équations d'Euler par la lecture de certains passages des trois mémoires présentés par Euler à l'Académie des Sciences de Berlin entre 1750 et 1758.

Le premier mémoire est la « Découverte d'un nouveau principe de Mécanique ». Euler, inspiré par les recherches sur les fluides faites par Jean Bernoulli et par lui-même et aussi par la lecture des *Recherches* de d'Alembert, y formule le principe général qui règle, à son avis, le mouvement des corps étendus, soient-ils solides ou déformables. L'idée de départ est assez simple :

> Quoique les principes dont il s'agit ici soient nouveaux, en tant qu'ils ne sont pas encore connus ou étalés par les Auteurs qui ont traité la Mécanique, on comprend néanmoins, que le fondement de ces principes ne saurait être nouveau, mais qu'il est absolument nécessaire que ces principes soient déduits des premiers principes, ou plutôt des axiomes, sur lesquels toute la doctrine du mouvement est établie. Ces axiomes se rapportent à des corps infiniment petits, ou tels, qui ne soient susceptibles d'autre mouvement que de progressif ; et c'est de là que tous les autres principes du mouvement doivent être déduits, tant ceux qui servent à déterminer les mouvements des corps des solides que des fluides[15].

Il s'ensuit que chaque élément infinitésimal du corps doit suivre les lois de Newton « en tant que chaque élément participe des forces, qui agissent sur le corps, et qu'il est outre cela sollicité par de certaines forces, qui l'empêchent, qu'il n'abandonne la connexion avec les autres[16] ». À propos de ces dernières forces Euler est plutôt réticent. Dans la « Découverte » il se limite à affirmer que « les forces internes se détruisent mutuellement[17] ». Du contexte, d'après sa façon de rassembler les équations de Newton de chaque partie infinitésimale du corps, on entend que pour lui les forces internes sont un système à résultante et à moment résultant nuls.

Ayant éclairci les fondements physiques de son approche, Euler passe à l'étude

[15]Découverte d'un nouveau principe de mécanique, p. 194 ; *Opera Omnia*, série 2, vol. 5, p. 88.
[16]*Ibid.*, p. 197 ; *Opera Omnia*, p. 90.
[17]*Ibid.*, p. 206 ; *Opera Omnia*, p. 99.

de la cinématique du corps solide. Il fait usage du concept de champ de vitesses du solide par rapport à un référentiel fixe dans l'espace, dont il calcule le tenseur vitesse de déformation (c'est-à-dire la dérivée de Lie de la métrique de l'espace euclidien par rapport au champ de vitesses). En imposant que ce tenseur soit identiquement nul, il obtient le champ des vitesses d'un corps solide avec point fixe le plus général, qu'il écrit sous la forme

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu z - \nu y \ ,\\ \dot{y} &= \nu x - \lambda z \ ,\\ \dot{z} &= \lambda y - \mu x \ .\end{aligned}$$

Ici (λ, μ, ν) sont trois paramètres arbitraires, qui dépendent seulement du temps et non des coordonnées d'espace. Il reconnaît immédiatement l'existence d'un axe de rotation instantanée, variable avec le temps, autour duquel le corps tourne avec la vitesse angulaire

$$\omega = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2} \ .$$

Il visualise cet axe par les trois angles (α, β, γ) qu'il forme avec les axes fixes, et il reconnaît que les paramètres (λ, μ, ν) sont les composantes

$$\lambda = \omega \ \cos\alpha \quad , \quad \mu = \omega \ \cos\beta \quad , \quad \nu = \omega \ \cos\gamma$$

de la vitesse angulaire. Ainsi, sans posséder le concept de vecteur, Euler parvient à découvrir les composantes de la vitesse angulaire et à en faire usage dans l'étude du mouvement du corps solide. Dorénavant nous indiquerons ces composantes sur les axes fixes par la notation moderne $\omega_x, \omega_y, \omega_z$.

Après le champ de vitesses, Euler évalue le champs des accélérations des points du corps solide. Il en a besoin pour écrire l'équation de Newton de chaque partie infinitésimale du corps. Il obtient les formules

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= z\dot{\omega}_y - y\dot{\omega}_z - (\omega_y^2 + \omega_z^2)x + \omega_x\omega_y y + \omega_x\omega_z z\\ \ddot{y} &= x\dot{\omega}_z - z\dot{\omega}_x - (\omega_z^2 + \omega_x^2)y + \omega_y\omega_z z + \omega_y\omega_x x\\ \ddot{z} &= y\dot{\omega}_x - x\dot{\omega}_y - (\omega_x^2 + \omega_y^2)z + \omega_z\omega_x x + \omega_z\omega_y y \ .\end{aligned}$$

Pour se débarrasser des forces internes, qui apparaissent dans les équations de Newton, Euler passe aux moments relatifs aux axes fixes. Il doit calculer des expressions du type

$$\int (y\ddot{z} - z\ddot{y}) \, dM \ ,$$

où la somme est étendue à toute les parties infinitésimales du corps. Il obtient ainsi les trois équations différentielles ordinaires suivantes

$$\begin{aligned}I_{xx}\dot{\omega}_x + I_{xy}\dot{\omega}_y + I_{xz}\dot{\omega}_z + \omega_y(I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z) - \omega_z(I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z) &= M_x\\ I_{yx}\dot{\omega}_x + I_{yy}\dot{\omega}_y + I_{yz}\dot{\omega}_z + \omega_z(I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z) - \omega_x(I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z) &= M_y\\ I_{zx}\dot{\omega}_x + I_{zy}\dot{\omega}_y + I_{zz}\dot{\omega}_z + \omega_x(I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z) - \omega_y(I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z) &= M_z\end{aligned}$$

dont les coefficients sont les composantes du tenseur d'inertie du corps solide relativement aux axes fixes. Ils sont variables avec le temps, à cause du mouvement du corps rigide. Cette variabilité rend les équations impossibles à exploiter, et Euler regrette que « l'application en est pourtant souvent extrêmement difficile »[18].

L'année suivante, pour surmonter cette difficulté, Euler juge raisonnable de prendre des axes orthogonaux attachés au solide, et d'en faire usage tant pour l'étude de la cinématique du solide, que pour écrire les équations du mouvement. Il présente ses résultats dans le mémoire « Du mouvement d'un corps solide quelconque lorsqu'il tourne autour d'un axe mobile ». Au début il se sert, dans le style de d'Alembert, des « angles d'Euler » des axes mobiles a, b, c par rapport aux axes fixes x, y, z. Au moyen de la trigonométrie sphérique, il obtient les formules de changement de coordonnées,

$$\begin{aligned} x &= A_1 a + B_1 b + C_1 c \\ y &= A_2 a + B_2 b + C_2 c \\ z &= A_3 a + B_3 b + C_3 c\,. \end{aligned}$$

Par dérivation par rapport au temps, ces formules lui donnent les composantes de la vitesse d'un point générique du solide, qu'il peut comparer aux formules obtenues précédemment dans la « Découverte ». Ceci lui permet d'évaluer les composantes $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ de la vitesse angulaire du corps solide en fonction des angles d'Euler. Il obtient les formules classiques

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot\theta \cos\psi + \dot\varphi \sin\theta\, \sin\psi \\ \omega_y &= \dot\theta \sin\psi - \dot\varphi \sin\theta\, \cos\psi \\ \omega_z &= \dot\psi + \dot\varphi \cos\theta\,. \end{aligned}$$

Ce résultat complète l'analyse cinématique commencée dans la « Découverte », et donne à Euler une autre méthode pour reconstruire le mouvement du corps solide une fois déterminées les composantes de la vitesse angulaire. En outre, ce résultat sera très utile dans la suite, suggérant à Euler les bonnes variables qui lui permettront de simplifier la forme des équations du mouvement.

À ce point Euler décide d'utiliser aussi les axes mobiles pour écrire les équations de mouvement. Il doit calculer les composantes a_a, a_b, a_c de l'accélération des points du solide par rapport aux axes mobiles. Il observe que les accélérations se transforment comme les forces et qu'« on sait par les principes de la Statique » que les forces se

[18] Du mouvement d'un corps solide quelconque lorsqu'il tourne autour d'un axe mobile, présenté le 7 octobre 1751, *Mémoires de l'Académie de Berlin*, (1760) 16, 1767, p. 178 ; *Opera Omnia*, série II, vol. 8, p. 315.

transforment comme les coordonnées. Donc on a

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= A_1 a_a + B_1 a_b + C_1 a_c \ ,\\ \ddot{y} &= A_2 a_a + B_2 a_b + C_2 a_c \ ,\\ \ddot{z} &= A_3 a_a + B_3 a_b + C_3 a_c \ .\end{aligned}$$

Comme dans la « Découverte », Euler passe aux moments, en évaluant des intégrales du type

$$\int (ba_c - ca_b)\, dM$$

étendues au corps entier. D'abord, il obtient des équations de mouvement extrêmement compliquées, où apparaissent les dérivées secondes des angles d'Euler. Mais il s'aperçoit d'un petit miracle. Si au lieu des angles d'Euler il introduit les composantes $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ de la vitesse angulaire sur les axes mobiles, qu'il peut évaluer par des méthodes géométriques, en étudiant l'inclinaison de l'axe de rotation instantanée sur les axes mobiles, alors les équations du mouvement se simplifient. Il est intéressant de reproduire la page où Euler explique cela[19] :

> Ces expressions étant fort compliquées, il sera à propos d'introduire, au lieu des trois variables p, q, r [les angles d'Euler dans la notation d'Euler] trois autres qui en sont déterminées, et par lesquelles nos expressions deviennent plus simples. Pour cet effet je pose :
>
> $$\begin{aligned} dp \sin q\, \cos r + dq \sin r &= P\, dt\\ dp \sin q\, \cos r - dq \cos r &= Q\, dt\\ dp \cos q \qquad - dr \quad &= R\, dt\ ,\end{aligned}$$
>
> et alors nous trouverons les expressions suivantes :
>
> I. Le moment autour de l'axe OM dans le sens ST :
>
> $$2M \left\{\begin{array}{l} gg\left(\dfrac{dR}{dt} + PQ\right) + hh\left(\dfrac{dR}{dt} - PQ\right)\\ -\ell\ell\left(\dfrac{dP}{dt} - QR\right) - mm\left(\dfrac{dQ}{dt} + PR\right) - nn(PP - QQ)\end{array}\right\}$$
>
> II. Le moment autour de l'axe OS dans le sens MT :
>
> $$2M \left\{\begin{array}{l} -ff\left(\dfrac{dP}{dt} - QR\right) - hh\left(\dfrac{dP}{dt} + QR\right)\\ -\ell\ell\left(\dfrac{dR}{dt} + PQ\right) + mm(QQ - RR) + nn\left(\dfrac{dQ}{dt} - PR\right)\end{array}\right\}$$

[19] *Ibid.*, p. 205 ; *Opera Omnia*, série II, vol. 8, p. 337–338.

> III. Le moment autour de l'axe OT dans le sens MS :
>
> $$2M \left\{ \begin{array}{l} ff\left(\dfrac{dQ}{dt}+PR\right)+gg\left(\dfrac{dQ}{dt}-PR\right) \\ +\ell\ell(PP-RR)-mm\left(\dfrac{dR}{dt}-PQ\right)-nn\left(\dfrac{dP}{dt}+QR\right) \end{array} \right\}$$
>
> [...] on y remarque aussi une uniformité fort belle, par laquelle nous voyons que ces trois nouvelles quantités entrent également dans la détermination de nos trois moments. Cette régularité sert aussi de preuve pour justifier le calcul que je viens de développer.

Traduit en notation moderne, le calcul d'Euler signifie que si on introduit les composantes, ω_a, $\omega_b\,\omega_c$, de la vitesse angulaire sur les axes mobiles, les équations du mouvement prennent la forme symétrique

$$I_{aa}\dot{\omega}_a + I_{ab}\dot{\omega}_b + I_{ac}\dot{\omega}_c + \omega_b(I_{ca}\omega_a + I_{cb}\omega_b + I_{cc}\omega_c) - \omega_c(I_{ba}\omega_a + I_{bb}\omega_b + I_{bc}\omega_c) = M_a$$
$$I_{ba}\dot{\omega}_a + I_{bb}\dot{\omega}_b + I_{bc}\dot{\omega}_c + \omega_c(I_{aa}\omega_a + I_{ab}\omega_b + I_{ac}\omega_c) - \omega_a(I_{ca}\omega_a + I_{cb}\omega_b + I_{cc}\omega_c) = M_b$$
$$I_{ca}\dot{\omega}_a + I_{cb}\dot{\omega}_b + I_{cc}\dot{\omega}_c + \omega_a(I_{ba}\omega_a + I_{bb}\omega_b + I_{bc}\omega_c) - \omega_b(I_{aa}\omega_a + I_{ab}\omega_b + I_{ac}\omega_c) = M_c$$

où les coefficients I_{ab} sont les composantes du tenseur d'inertie du solide par rapport aux axes mobiles. Ils sont donc constants dans le temps. Par ce long chemin, Euler a réussi à surmonter la difficulté qui l'avait arrêté dans la « Découverte ».

Pour avoir une explication satisfaisante du petit miracle décrit par Euler, il faut toutefois attendre encore sept ans. Dans le mémoire « Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe variable », Euler remarque qu'on peut passer des équations obtenues dans la « Découverte » aux nouvelles équations en remplaçant simplement partout les composantes (ω_x, I_{xy}, M_x) de la vitesse angulaire, du tenseur d'inertie et du moment des forces extérieures sur les axes fixes par leur homologues (ω_a, I_{ab}, M_a) sur les axes mobiles, et surtout les dérivées $\dot{\omega}_x$ par les dérivées $\dot{\omega}_a$. Il raisonne comme suit :

> Puisque nous ne regardons ici qu'à l'instant présent, rien n'empêche d'établir ensuite les trois directions fixes, IA, IB, IC, de façon qu'elles conviennent avec les axes mobiles du corps, et c'est cette considération qui nous met en état de surmonter les difficultés que j'avais rencontrées en suivant d'autres méthodes. On pourrait objecter, que les variations des angles α, β, γ, étant rapportées aux directions fixes, ne sauraient être tirées de leurs relations aux axes mobiles, qui s'écartent des directions fixes dès le premier instant. Mais, puisque les axes mobiles tournent avec le corps autour de l'axe de rotation IO, ils en conservent les mêmes distances que les directions fixes, de sorte que, si l'axe de rotation demeurait fixe, les angles α, β, γ, seraient constants à l'un et l'autre égard. Et si l'axe de rotation IO varie, il variera précisément autant à l'égard des axes mobiles du corps que des directions fixes. Par cette

> raison il sera permis de supposer que les axes mobiles du corps conviennent à l'instant présent avec les trois directions fixes IA, IB, IC[20].

Ce qui est devenu clair aux yeux d'Euler en 1758 est que les composantes de la vitesse angulaire $\omega_x(t)$ et $\omega_a(t)$ et leurs dérivées temporelles coïncident au moment où les axes mobiles coïncident avec les axes fixes. Le choix astucieux des repères de référence annule toute différence entre axes fixes et axes mobiles. Les équations de la « Découverte » deviennent ainsi les équations trouvées dans l'« Axe mobile ».

Telle est l'histoire de la découverte des équations d'Euler d'un corps solide qui tourne autour d'un axe de direction variable.

La synthèse de Lagrange

À la fin des années soixante du dix-huitième siècle on connaît déjà quatre formes différentes des équations du mouvement d'un corps solide qui tourne autour d'un point fixe. Elles sont :

1. les équations de d'Alembert,
2. les équations trouvées par Euler en 1750,
3. les équations trouvées par Euler en 1751 et 1758,
4. les équations de Lagrange.

Ces dernières équations avaient été découvertes par Lagrange en 1764 dans ses « Recherches sur la libration de la Lune », où il avait montré comment traduire en un procédé de calcul uniforme le principe de d'Alembert, « réduit en formule au moyen du Principe de l'équilibre appelé communément loi des vitesses virtuelles »[21]. La méthode de Lagrange avait l'avantage de ne demander aucune construction géométrique, mais elle était au fond équivalente à celle de d'Alembert. Les équations d'Euler semblaient encore hors d'atteinte.

La situation change en 1780, quand Lagrange introduit l'« équation centrale » de la dynamique dans son mémoire « Théorie de la libration de la Lune ». Il s'agit d'un changement profond de notre façon de concevoir les équations de la Mécanique, qui sont transformées par Lagrange en une équation de bilan pour une nouvelle grandeur appelée « action de Maupertuis ». Nous reproduisons maintenant le discours de Lagrange dans un langage plus moderne, pour en souligner l'actualité.

[20] Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe variable, présenté le 9 novembre 1758, *Mémoires de l'Académie* de Berlin (1758), 14 (1765), p. 162 ; *Opera Omnia*, série II, vol. 8, p. 207–208.

[21] Théorie de la libration de la Lune, et des autres phénomènes qui dépendent de la figure non sphérique de cette planète, *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin*, 1780, p. 209 ; *Œuvres*, vol. 5, p. 11.

L'idée sous-jacente est simple et peut être expliquée dans le cas d'un seul point matériel qui se meut librement dans l'espace euclidien. Partons, comme faisait Euler dans la « Découverte », des équations de Newton en coordonnées cartésiennes

$$m\ddot{x} = P \ ,$$
$$m\ddot{y} = Q \ ,$$
$$m\ddot{z} = R \ ,$$

et procédons, tout de suite, à leur transformation en une égalité entre formes différentielles. Pour ce faire, il suffit de les écrire sous la forme

$$m\ddot{x}\,dx + m\ddot{y}\,dy + m\ddot{z}\,dz = Pdx + Qdy + Rdz \ .$$

Cette équation contient, en même temps, la position, la vitesse et l'accélération de la particule. On peut faire disparaître l'accélération par une intégration par parties. L'équation prend alors la forme

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(m\dot{x}\,dx + m\dot{y}\,dy + m\dot{z}\,dz) = \\ &\qquad = Pdx + Qdy + Rdz + m\dot{x}\frac{d}{dt}(dx) + m\dot{y}\frac{d}{dt}(dy) + m\dot{z}\frac{d}{dt}(dz) \ .\end{aligned}$$

Essayons à présent d'interpréter cette équation comme une égalité entre formes différentielles sur l'espace des vitesses de la particule. L'expression

$$a_M = m\dot{x}dx + m\dot{y}dy + m\dot{z}dz = m\vec{v}\cdot dP$$

est une forme différentielle qu'on peut nommer « action de Maupertuis », puisque sa restriction sur la trajectoire de la particule

$$a_M = m\vec{v}\cdot dP = m\vec{v}\cdot\vec{t}\,ds = mv\,ds$$

donne l'action utilisée par Maupertuis pour énoncer son principe de la moindre action. Quant à la dérivée de cette forme, elle peut être interprétée seulement comme la dérivée de Lie de l'action de Maupertuis le long du flot qui décrit, sur l'espace des vitesses, tous les mouvements que la particule peut suivre selon des données initiales.

Une fois acceptée cette interprétation, on peut remarquer que la théorie des formes différentielles nous permet de faire la substitution

$$\frac{d}{dt}\,dx = d\dot{x} \ ,$$

puisque la dérivée de Lie commute avec la différentielle extérieure. Par cette substitution le second membre de l'équation de Lagrange devient la forme différentielle

$$\begin{aligned}\ell_L &= Pdx + Qdy + Rdz + m\dot{x}\,d\dot{x} + m\dot{y}\,d\dot{y} + m\dot{z}\,d\dot{z} \\ &= Pdx + Qdy + Rdz + dT\end{aligned}$$

où T est l'énergie cinétique de la particule, qui a la signification de travail qu'on doit faire sur la particule pour changer en même temps sa position et sa vitesse, c'est-à-dire la signification de travail dynamique. À cette forme sur l'espace des vitesses on peut donner le nom de « travail de Lagrange » puisque, quand les forces extérieures dérivent d'une fonction U, elle devient la différentielle de la fonction de Lagrange :

$$\ell_L = Pdx + Qdy + Rdz + dT = dU + dT = dL \ .$$

On est ainsi conduit à la forme finale de l'équation centrale de Lagrange, écrite comme équation de bilan pour l'action de Maupertuis,

$$\frac{d}{dt}\, a_M = \ell_L \ .$$

Elle affirme que, pendant le mouvement de la particule, la dérivée par rapport au temps de l'action de Maupertuis est toujours égale au travail dépensé pour faire varier sa position et sa vitesse. L'extension aux corps solides est, ensuite, automatique. Il suffit de calculer les formes a_M et ℓ_L par addition sur les parties infinitésimales du corps, et de restreindre les déplacements infinitésimaux des points et les variations infinitésimales des vitesses à ceux qui sont permis par les contraintes.

Entre les mains de Lagrange, l'équation centrale est devenue la clé, dans la *Méchanique analitique* de 1788, pour reconstruire toutes les formes connues des équations du mouvement d'un corps solide suivant un procédé uniforme. Le but de ce paragraphe est de reproduire, en forme stylisée, les calculs faits par Lagrange dans la sixième section de la seconde partie de la *Méchanique Analitique*. Ces calculs se fondent sur deux observations préliminaires qui viennent de la cinématique et de la statique des corps solides en rotation autour d'un point fixe.

On sait d'après la cinématique que le déplacement infinitésimal d'un tel corps peut toujours être décomposé en la somme de trois rotations infinitésimales autour de trois axes choisis arbitrairement. Pour chaque décomposition on introduit les angles de rotation autour des axes choisis. Ces angles sont des formes différentielles dans les angles d'Euler qui servent à fixer la position du corps rigide dans l'espace. Voyons les trois cas de décomposition qui nous intéressent.

La première décomposition est adaptée à la définition des angles d'Euler. Le déplacement du corps est décomposé en une rotation d'angle $d\psi$ autour de l'axe de précession, suivie par une rotation d'angle $d\theta$ autour de la ligne des nœuds et par une rotation d'angle $d\varphi$ autour de l'axe de figure. Pour ce choix des axes de rotation les angles de rotation sont donnés par les formules

$$\varepsilon_\psi = d\psi \ ,$$
$$\varepsilon_\theta = d\theta \ ,$$
$$\varepsilon_\varphi = d\varphi \ ,$$

et les composantes de la vitesse angulaire sont de même données par les formules

$$\omega_\psi = \dot\psi \ ,$$
$$\omega_\theta = \dot\theta \ ,$$
$$\omega_\varphi = \dot\varphi \ .$$

La deuxième décomposition est, au contraire, relative aux axes principaux d'inertie. Les angles de rotation autour de ces axes sont donnés par les formules

$$\varepsilon_a = \sin\theta\ \sin\varphi\, d\psi + \cos\varphi\, d\theta \ ,$$
$$\varepsilon_b = \sin\theta\ \cos\varphi\, d\psi - \sin\varphi\, d\theta \ ,$$
$$\varepsilon_c = \cos\theta\, d\psi + d\varphi \ ,$$

et les composantes correspondantes de la vitesse angulaire sont

$$\omega_a = \dot\psi \sin\theta\ \sin\varphi + \dot\theta \cos\varphi \ ,$$
$$\omega_b = \dot\psi \sin\theta\ \cos\varphi - \dot\theta \sin\varphi \ ,$$
$$\omega_c = \dot\psi \cos\theta + \dot\varphi \ .$$

La troisième décomposition, enfin, est relative aux trois axes de référence, fixes dans l'espace. Dans ce cas les trois angles de rotation sont donnés par les formules d'Euler

$$\varepsilon_x = \cos\psi\, d\theta + \sin\theta\ \sin\psi\, d\varphi \ ,$$
$$\varepsilon_y = \sin\psi\, d\theta - \sin\theta\ \cos\psi\, d\varphi \ ,$$
$$\varepsilon_z = d\psi + \cos\theta\, d\varphi \ ,$$

et les composantes correspondantes de la vitesse angulaire sont

$$\omega_x = \dot\theta \cos\psi + \dot\varphi \sin\theta\ \sin\psi \ ,$$
$$\omega_y = \dot\theta \sin\psi - \dot\varphi \sin\theta\ \cos\psi \ ,$$
$$\omega_z = \dot\psi + \dot\varphi\ \cos\theta \ .$$

Quant aux dérivées des angles de rotation par rapport au temps, pendant le mouvement du corps solide, dans le premier cas on a évidemment

$$\frac{d}{dt} d\varphi = d\dot\psi \ ,$$
$$\frac{d}{dt} d\theta = d\dot\theta \ ,$$
$$\frac{d}{dt} d\varphi = d\dot\varphi \ ,$$

toujours par la commutativité de la dérivée de Lie avec la différentielle extérieure. Dans le deuxième cas, au contraire, on a

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\varepsilon_a &= d\omega_a + \omega_c\varepsilon_b - \omega_b\varepsilon_c \ , \\
\frac{d}{dt}\varepsilon_b &= d\omega_b + \omega_a\varepsilon_c - \omega_c\varepsilon_a \ , \\
\frac{d}{dt}\varepsilon_c &= d\omega_c + \omega_b\varepsilon_a - \omega_a\varepsilon_b \ ,
\end{aligned}$$

puisque les angles de rotation ne sont pas des formes différentielles exactes. Ces formules sont une conséquence des formules de dérivation des différentielles des angles d'Euler écrites ci-dessus. Enfin, dans le troisième cas on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\varepsilon_x &= d\omega_x + \omega_y\varepsilon_z - \omega_z\varepsilon_y \ , \\
\frac{d}{dt}\varepsilon_y &= d\omega_y + \omega_z\varepsilon_x - \omega_x\varepsilon_z \ , \\
\frac{d}{dt}\varepsilon_z &= d\omega_z + \omega_x\varepsilon_y - \omega_y\varepsilon_x \ .
\end{aligned}$$

Ces informations sont tout ce qui nous intéresse sur la cinématique du corps solide.

On sait ensuite d'après la statique que le travail d'un système de vecteurs dans une rotation infinitésimale est le produit du moment du système des vecteurs par rapport à l'axe de rotation, et de l'angle infinitésimal de rotation. Il suit de là que l'action de Maupertuis du corps solide est donnée, dans les trois cas, par les formules

$$\begin{aligned}
a_M &= L_\psi d\psi + L_\theta d\theta + L_\varphi d\varphi \ , \\
a_M &= L_a\varepsilon_a + L_b\varepsilon_b + L_c\varepsilon_c \ , \\
a_M &= L_x\varepsilon_x + L_y\varepsilon_y + L_z\varepsilon_z \ ,
\end{aligned}$$

où les coefficients sont les projections du moment angulaire du corps solide sur les axes de rotation utilisés dans la décomposition choisie. Il suit aussi que le travail de Lagrange sera donné par les formules analogues

$$\begin{aligned}
\ell_L &= M_\psi d\psi + M_\theta d\theta + M_\varphi d\varphi + dT \ , \\
\ell_L &= M_a\varepsilon_a + M_b\varepsilon_b + M_c\varepsilon_c + dT \ , \\
\ell_L &= M_x\varepsilon_x + M_y\varepsilon_y + M_z\varepsilon_z + dT \ ,
\end{aligned}$$

où l'énergie cinétique du corps solide sera écrite en fonction des composantes de la vitesse angulaire sur les axes de rotation choisis.

Pour déduire les équations du mouvement du corps solide suivant la méthode de Lagrange, il ne reste à présent qu'à développer l'équation centrale sur la base des

1-formes relative à la décomposition choisie. Dans le cas de la première décomposition, on a :

$$\begin{aligned}
\ell_L &= M_\psi d\psi + M_\theta d\theta + M_\varphi d\varphi + dT(\psi, \theta, \varphi; \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) \ , \\
\frac{da_M}{dt} &= \dot{L}_\psi d\psi + \dot{L}_\theta d\theta + \dot{L}_\varphi d\varphi + L_\psi d\dot{\psi} + L_\theta d\dot{\theta} + L_\varphi d\dot{\varphi} \ .
\end{aligned}$$

En égalant les coefficients sur la base de 1-formes $(d\dot{\psi}, d\dot{\theta}, d\dot{\varphi}, d\psi, d\theta, d\varphi)$, on trouve les six équations différentielles

$$\begin{aligned}
L_\psi &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \ , \\
L_\theta &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \ , \\
L_\varphi &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \ , \\
\dot{L}_\psi &= M_\psi + \frac{\partial T}{\partial \psi} \ , \\
\dot{L}_\theta &= M_\theta + \frac{\partial T}{\partial \theta} \ , \\
\dot{L}_\varphi &= M_\varphi + \frac{\partial T}{\partial \varphi} \ .
\end{aligned}$$

Les trois premières équations donnent les composantes du moment angulaire du corps solide sur les axes de rotation associés aux angles d'Euler. Les trois autres équations donnent, par élimination des composantes du moment angulaire, les équations du mouvement, écrites par Lagrange en 1764 dans ses « Recherches sur la libration de la lune ».

On procède de même dans le cas de la décomposition de la rotation du corps solide autour des axes principaux d'inertie. Dans ce cas on a

$$\ell_L = M_a \varepsilon_a + M_b \varepsilon_b + M_c \varepsilon_c + d\frac{1}{2}(A\omega_a^2 + B\omega_b^2 + C\omega_c^2)$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{da_M}{dt} =& \dot{L}_a \varepsilon_a + \dot{L}_b \varepsilon_b + \dot{L}_c \varepsilon_c \\
&+ L_a(d\omega_a + \omega_c \varepsilon_b - \omega_b \varepsilon_c) + L_b(d\omega_b + \omega_a \varepsilon_c - \omega_c \varepsilon_a) + L_c(d\omega_c + \omega_b \varepsilon_a - \omega_a \varepsilon_b) \ .
\end{aligned}$$

En égalant les coefficients sur la base $(d\omega_a, d\omega_b, d\omega_b, \varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_c)$, on obtient les équations d'Euler de 1758 :

$$
\begin{aligned}
&L_a = A\omega_a \ , \\
&L_b = B\omega_b \ , \\
&L_c = C\omega_c \ , \\
&\dot{L}_a + L_c\omega_b - L_b\omega_c = M_a \ , \\
&\dot{L}_b + L_a\omega_c - L_c\omega_a = M_b \ , \\
&\dot{L}_c + L_b\omega_a - L_a\omega_b = M_c \ .
\end{aligned}
$$

On voit ainsi qu'il n'y a pas de différence conceptuelle entre les équations de Lagrange et les équations d'Euler du corps solide. Elles correspondent à deux façons différentes de décomposer l'équation centrale de la dynamique.

Rien ne change, en principe, si l'on choisit la troisième décomposition de la rotation du corps solide, autour des trois axes de référence fixes dans l'espace. Seulement les calculs deviennent un peu plus longs, à cause de la variabilité des coefficients d'inertie qui entrent dans l'expression de l'énergie cinétique, et nous les omettrons. On obtiendrait ainsi les équations trouvées par Euler en 1750, dans son premier mémoire « Découverte d'un nouveau principe de Mécanique ».

La synthèse de Poisson

La méthode de l'équation centrale de Lagrange demande de faire usage des formes différentielles pour écrire les équations du mouvement de la Mécanique. Ce type d'instrument était trop abstrait et trop avant son temps pour être bien reçu à la fin du dix-huitième siècle. On devra attendre l'œuvre de Poincaré, Hamel, Cartan et l'avènement de la mécanique symplectique pour le mettre dans le juste cadre théorique. Il est donc naturel que les idées de Lagrange soient restées inachevées, et que la recherche d'une synthèse des différentes formes de la dynamique du corps solide ait été poursuivie suivant des routes différentes. Une de ces routes a été tracée par Poisson. Le but de ce paragraphe est de présenter le point de vue de Poisson en stricte corrélation avec les idées de Lagrange. L'intention est de souligner comment Lagrange et Poisson ont utilisé les mêmes arguments à un niveau d'abstraction différent.

Poisson apporte deux changements essentiels à l'approche de Lagrange. Le premier concerne la cinématique. Les objets importants dans la cinématique du corps solide en rotation autour d'un point fixe sont les rotations infinitésimales. Elles sont définies par un angle de rotation, qui est une forme différentielle dans les angles d'Euler, et par l'axe de rotation qui est représenté par un vecteur unitaire. Quand on considère la décomposition du déplacement infinitésimal le plus général du corps rigide en trois rotations infinitésimales autour de trois axes choisis arbitrairement, il faut ainsi une base de formes et une base de vecteurs unitaires. Par exemple, si l'on considère la décomposition en trois rotations autour des axes principaux d'inertie, l'étude des angles conduit à la base de formes différentielles,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_a &= \sin\theta\,\sin\varphi\,d\psi + \cos\varphi d\theta\ , \\
\varepsilon_b &= \sin\theta\,\cos\varphi\,d\psi - \sin\varphi d\theta\ , \\
\varepsilon_c &= \cos\theta\,\mathrm{d}\psi + d\varphi\ ,
\end{aligned}$$

dans l'espace de configuration du corps rigide, tandis que les axes de rotation donnent le trièdre mobile,

$$\vec{a} = (\cos\varphi\,\cos\psi - \sin\varphi\,\cos\theta\,\sin\psi)\vec{i} - (\cos\psi\,\sin\varphi + \sin\psi\,\cos\theta\,\cos\varphi)\vec{j} + \sin\psi\,\sin\theta\,\vec{k},$$

$$\vec{b} = (\sin\psi\,\cos\varphi + \cos\psi\,\cos\theta\,\sin\varphi)\vec{i} - (\sin\psi\,\sin\varphi - \cos\psi\,\cos\theta\,\cos\varphi)\vec{j} - \cos\psi\,\sin\theta\,\vec{k},$$

$$\vec{c} = \sin\theta\,\sin\varphi\,\vec{i} + \sin\theta\,\cos\varphi\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k}\ ,$$

dans l'espace euclidien. Lagrange avait choisi de travailler avec les angles $\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_c$. Poisson fait le choix de travailler avec les vecteurs unitaires $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Il découvre la loi du mouvement de cette base, qu'il écrit sous la forme d'un système d'équations différentielles pour les colonnes de la matrice orthogonale des composantes de la base mobile $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ par rapport à la base fixe $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$[22]. Aujourd'hui on a l'habitude d'écrire les formules de Poisson sous la forme vectorielle

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{a}}{dt} &= \vec{\omega} \wedge \vec{a}\ , \\
\frac{d\vec{b}}{dt} &= \vec{\omega} \wedge \vec{b}\ , \\
\frac{d\vec{c}}{dt} &= \vec{\omega} \wedge \vec{c}\ ,
\end{aligned}$$

où $\vec{\omega} = \omega_a\vec{a} + \omega_b\vec{b} + \omega_c\vec{c}$ est le vecteur vitesse angulaire du corps solide. Il est clair que ces formules prennent la place, dans l'approche de Poisson, des formules

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\varepsilon_a &= d\omega_a + \omega_c\varepsilon_b - \omega_b\varepsilon_c\ , \\
\frac{d}{dt}\varepsilon_b &= d\omega_b + \omega_a\varepsilon_c - \omega_c\varepsilon_a\ , \\
\frac{d}{dt}\varepsilon_c &= d\omega_c + \omega_b\varepsilon_a - \omega_a\varepsilon_b\ ,
\end{aligned}$$

[22] *Traité de Mécanique*, 1833, chapitre 4, p. 135.

utilisées par Lagrange dans la *Méchanique analitique*. On voit ainsi que tout se passe de manière analogue dans Lagrange et Poisson, mais à des niveaux différents. Lagrange travaille dans l'espace des vitesses du corps solide, c'est-à-dire, en langage moderne, dans le fibré tangent du groupe des rotations. Poisson travaille dans l'espace euclidien identifié avec l'algèbre de Lie du même groupe.

Le second changement apporté par Poisson concerne le choix du principe sur lequel fonder la théorie du mouvement du corps solide. Il a horreur du caractère abstrait de l'espace des vitesses utilisé par Lagrange, et il veut ramener la mécanique du corps solide dans le cadre familier de l'espace euclidien de la physique classique. Pour cette raison, inspiré par Euler, il remplace l'équation centrale de Lagrange par l'équation de bilan du moment angulaire

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \; .$$

Dans le cadre de la théorie des groupes de Lie, on interprète cette substitution comme une projection de l'équation centrale de Lagrange du fibré tangent du groupe des rotations sur son algèbre de Lie. À un niveau plus élémentaire, on peut comprendre ce processus de projection de l'équation centrale, si l'on remarque que pour un corps solide avec un point fixe l'équation centrale peut être écrite sous la forme vectorielle

$$\frac{d}{dt}(\vec{L} \cdot \vec{\varepsilon}) = \vec{M} \cdot \vec{\varepsilon} + dT \; ,$$

où $\vec{\varepsilon} = \varepsilon_a \vec{a} + \varepsilon_b \vec{b} + \varepsilon_c \vec{c}$ est le vecteur rotation infinitésimale du corps solide. Par dérivation du produit scalaire[23] on trouve l'équation

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt} - \vec{M}\right) \cdot \vec{\varepsilon} + \left(\vec{L} \cdot \frac{d\vec{\varepsilon}}{dt} - dT\right) = 0 \; .$$

Mais pour un corps rigide avec un point fixe

$$dT = \vec{L} \cdot \frac{d\vec{\varepsilon}}{dt} \; .$$

On obtient donc l'équation

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt} - \vec{M}\right) \cdot \vec{\varepsilon} = 0$$

qui est manifestement équivalente à l'équation de bilan du moment angulaire puisque le vecteur rotation infinitésimale $\vec{\varepsilon}$ est arbitraire. Il est intéressant de remarquer que dans ce calcul on a répété exactement, dans l'ordre inverse, les transformations qui, dans la section précédente, avaient conduit de l'équation de Newton à l'équation centrale. Les transformations semblent plus simples dans ce cas, parce qu'il s'agit

[23]Ici il s'agit de la dérivation ordinaire des vecteurs dans l'espace euclidien, qui remplace la dérivée de Lie sur les formes parce que la connexion euclidienne est sans torsion.

de travailler sur le groupe des translations plutôt que sur le groupe non abélien des rotations. Mais le sens mathématique du processus est le même.

Désormais les calculs de Lagrange et de Poisson vont de pair. Lagrange développe l'équation centrale sur la base des angles de rotation, vus comme des forme différentielles. Poisson projette l'équation du moment angulaire sur la base des vecteurs unitaires associés aux axes de rotation.

Le cas le plus simple à traiter pour Poisson est celui des équations d'Euler de 1750. Elles sont évidemment obtenues comme projections de l'équation du moment angulaire sur la base des axes fixes dans l'espace. Ces projections donnent les équations

$$\begin{aligned}
\frac{dL_x}{dt} &= M_x \ , \\
\frac{dL_y}{dt} &= M_y \ , \\
\frac{dL_z}{dt} &= M_z \ ,
\end{aligned}$$

qui, une fois qu'on écrit les composantes du moment angulaire sur les axes fixes en fonction des composantes de la vitesse angulaire, se réduisent aux équations trouvées par Euler dans la « Découverte ».

Le cas suivant est celui des équations d'Euler de 1751 à 1758. Elles sont interprétées comme projections de l'équation du moment angulaire sur la base des axes mobiles attachés au solide. Comme Lagrange devait utiliser les identités

$$\frac{d}{dt}\varepsilon_a = d\omega_a + \omega_c\varepsilon_b - \omega_b\varepsilon_c$$

pour les dérivées des angles, Poisson doit utiliser ses équations pour les dérivées des axes mobiles. Ainsi il trouve

$$\begin{aligned}
M_a = \vec{M} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\vec{L} \cdot \vec{a}) - \vec{L} \cdot \frac{d\vec{a}}{dt} \\
&= \frac{dL_a}{dt} - \vec{L} \cdot \vec{\omega} \wedge \vec{a} \\
&= \frac{dL_a}{dt} + \vec{\omega} \wedge \vec{L} \cdot \vec{a}
\end{aligned}$$

par un calcul tout à fait semblable au calcul de Lagrange.

Le cas difficile pour Poisson est le cas des équations de Lagrange. En effet, les axes choisis par Lagrange ne sont pas orthogonaux, et les bases non orthogonales conviennent mal à l'approche de Poisson. Celui-ci ne traite pas le cas de Lagrange, mais pour compléter la comparaison nous montrerons comment il aurait pu le faire.

Soient $\vec{k}$ le vecteur unitaire de l'axe de précession, $\vec{\ell}$ celui de la ligne des nœuds, et $\vec{c}$ le vecteur unitaire de l'axe de figure. Les vecteurs $(\vec{k}, \vec{\ell}, \vec{c})$ forment la base des axes de Lagrange, dont les angles de rotation sont les angles d'Euler. Il manquait à Poisson des bonnes formules pour les dérivées de cette base, qui prennent la place des identités triviales,

$$\frac{d}{dt}d\psi = d\dot{\psi} \ ,$$
$$\frac{d}{dt}d\theta = d\dot{\theta} \ ,$$
$$\frac{d}{dt}d\varphi = d\dot{\varphi} \ ,$$

de Lagrange. Les formules cherchées peuvent être écrites sous la forme symétrique, mais pas vraiment intuitive,

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{k}}{dt} &= \frac{\partial p}{\partial \psi}\vec{a} + \frac{\partial q}{\partial \psi}\vec{b} + \frac{\partial r}{\partial \psi}\vec{c} \ ,\\
\frac{d\vec{\ell}}{dt} &= \frac{\partial p}{\partial \theta}\vec{a} + \frac{\partial q}{\partial \theta}\vec{b} + \frac{\partial r}{\partial \theta}\vec{c} \ ,\\
\frac{d\vec{c}}{dt} &= \frac{\partial p}{\partial \varphi}\vec{a} + \frac{\partial q}{\partial \varphi}\vec{b} + \frac{\partial r}{\partial \varphi}\vec{c} \ ,
\end{aligned}$$

où p, q, r sont les composantes de la vitesse angulaire du corps sur les axes mobiles attachés au solide, considérées comme fonctions des angles d'Euler et de leur dérivées premières. Au moyen de ces formules il est aisé de montrer que les projections de l'équation du moment angulaire se réduisent aux équations de Lagrange du corps solide.

Cette comparaison montre bien que les approches de Poisson et de Lagrange sont complémentaires : ce qui est simple dans une approche devient compliqué dans l'autre et vice versa. Donc toutes deux ont un rôle à jouer dans une présentation complète de la dynamique du corps solide.

En conclusion, on peut dire que la dynamique du corps rigide a été découverte entre 1749 et 1764 grâce à l'œuvre de d'Alembert, Euler et Lagrange, en relation avec les problèmes de l'astronomie. Dans ces quinze ans quatre formes différentes des équations du mouvement ont été découvertes : par d'Alembert en 1749 ; par Euler en 1750 ; encore par Euler en 1751 et 1758 ; par Lagrange en 1764. L'étude de ces équations a conduit à se poser la question de trouver un cadre théorique unifié, capable de servir de fondement général de la théorie.

Lagrange a été le porte-drapeau d'une formulation de la mécanique fondée sur les formes différentielles. Il demandait de travailler dans l'espace abstrait des vitesses des points du solide, et d'interpréter les équations du mouvement comme équation de bilan sur deux formes différentielles définies sur cet espace, l'action de Maupertuis et le travail de Lagrange. À son équation de bilan on a donné plus tard le nom d'équation centrale de la dynamique. Les temps n'étaient pas mûrs pour accepter les idées de Lagrange, et son point de vue a dû attendre pour être développé entièrement. Sa « Théorie de la libration de la Lune », écrite en 1780, est la date de naissance de l'équation centrale, et peut être considérée comme le début de la mécanique hamiltonienne.

Poisson, au contraire, a favorisé une approche concrète et réaliste de la dynamique du corps rigide, dans le cadre de l'espace euclidien de notre expérience physique. Il partageait la vision mécanique d'Euler, et le fondement mathématique pour lui était l'équation de bilan du moment angulaire. Son point de vue a eu une grande résonance et a influencé la majorité des traités de mécanique. On peut dire que dans la présentation de la dynamique du corps rigide qu'on rencontre dans ces traités les idées sont d'Euler mais la forme est due à Poisson.