

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA

Dottorato di Ricerca in Statistica ed Applicazioni
CICLO XXIV



**CURVA DI INEGUAGLIANZA $I_{(p)}$ E SCOMPOSIZIONE
PER FONTI DI REDDITO DELL'INDICE I DI ZENGA:
APPLICAZIONI SULLA SERIE STORICA DEI REDDITI
FAMILIARI ITALIANI**

Tesi di Dottorato di Santoro Francesco

Relatore:
Chiar.mo Prof. Michele Zenga

Anno Accademico 2011/2012

Indice

Introduzione	4
1 Indagine sui bilanci delle famiglie italiane: aspetti storici e metodologici	9
1.1 Introduzione	9
1.2 Indagini campionarie nel ventennio 1965 - 1985	10
1.3 Indagine relativa all'anno 1986: inizio di un nuovo ciclo	13
1.3.1 Disegno campionario	14
1.3.2 Questionario	16
1.4 La componente <i>panel</i> nel nuovo disegno campionario	16
1.5 Indagine relativa al 1998: introduzione della rilevazione CAPI	20
2 La curva $I_{(p)}$ e l'indice sintetico I di ineguaglianza di Zenga	23
2.1 Notazione	23
2.2 Il diagramma di ineguaglianza $I_{(p_j)}$	25
2.3 Estensione al caso continuo: la curva di ineguaglianza $I_{(p)}$	26
2.4 Proprietà della curva $I_{(p)}$	28
2.4.1 Relazione tra la curva $I_{(p)}$ e le curve di ineguaglianza $L_{(p)}$ di Lorenz e $B_{(p)}$ di Bonferroni	28
2.4.2 L'andamento non preconstituito della curva $I_{(p)}$	30
3 Applicazione	33
3.1 Descrizione dei dati	34
3.2 Risultati delle elaborazioni	37
3.3 Studio di alcuni punti caratteristici della curva $I_{(p)}$	41
3.4 Redditi familiari equivalenti e nozione di povertà relativa	44

4	Scomposizione per fonti di reddito dell'indice I di ineguaglianza	49
4.1	Introduzione	49
4.2	Definizioni e notazione	49
4.3	Decomposizione degli indici puntuali I_i e sintetico I di ineguaglianza	56
4.3.1	Caso matrice dei dati - DM	56
4.3.2	Caso matrice con i dati trasformati - STM	58
4.3.3	Caso matrice di cograduazione - CM	60
4.3.4	Relazione tra gli indici di ineguaglianza I^* di Y^* e ${}_jI_i$ di $X_{(j)}$.	61
4.4	Decomposizione dei contributi $B(X_j)$ all'indice sintetico di ineguaglianza I di Y	62
4.5	Decomposizione dei contributi $B^*(X_{(j)})$ di $X_{(j)}$ all'ineguaglianza I^* della variabile Y^*	65
4.5.1	Contributi delle variabili X_j ed R_j agli indici puntuale I_i^* e sintetico I^* di ineguaglianza	67
4.5.2	Contributi delle variabili $X_{(j)}$ ed R_j agli indici puntuale I_i e sintetico I di ineguaglianza	68
4.5.3	Relazioni tra i contributi della scomposizione degli indici I_i^* ed I_i	70
5	Applicazione e presentazione dei risultati	71
5.1	Introduzione	71
5.2	L'evoluzione dei contributi all'ineguaglianza negli ultimi venticinque anni	74
5.3	Contributi all'ineguaglianza del reddito totale teorico Y^*	77
6	Conclusioni	79
	Bibliografia	87

Introduzione

Il tema centrale del presente lavoro di tesi è lo studio dell'evoluzione temporale dell'ineguaglianza in riferimento alle indagini campionarie sui bilanci familiari italiani condotte dalla Banca d'Italia nel periodo 1977-2010¹. Tale studio viene affrontato sotto due punti di vista: il confronto temporale di misure sintetiche di ineguaglianza (indici I di Zenga (2007), G di Gini (1914)), in riferimento ai redditi familiari disponibili netti, pesati ed equivalenti e lo studio dell'evoluzione temporale delle fonti che compongono i redditi stessi. Questa seconda analisi è resa possibile grazie alla disponibilità dei dati in forma disaggregata: per ciascun reddito familiare sono disponibili le fonti che vanno a formare i redditi familiari stessi. Tuttavia, occorre segnalare che, i confronti temporali vanno effettuati con attenzione a causa delle modifiche che nel tempo hanno interessato il disegno campionario delle indagini e la definizione della variabile reddito e che, solo in parte possono essere tenute sotto controllo utilizzando i dati degli archivi storici dell'indagine campionaria sui bilanci familiari disponibili dal 1977.

Lo studio della problematica della distribuzione dei redditi o del benessere più in generale, ha rivestito grande interesse nel pensiero di numerosi filosofi ed economisti degli ultimi secoli. Una prima formalizzazione rigorosa che apre la strada ad un approccio scientifico al problema della ineguaglianza o concentrazione dei redditi, è da attribuirsi al lungimirante lavoro di Pareto che nel 1885, propose una prima modellizzazione matematica rigorosa della distribuzione dei redditi. Nei primi anni del novecento, nel solco dei dibattiti circa la definizione di ineguaglianza o concentrazione gli strumenti matematici - statistici adatti a caratterizzarla e a misurarla, si inseriscono, per i loro importanti contributi studiosi italiani quali Benini (1906), Bresciani-Turroni (1905, 1910), Cantelli (1921), Mortara (1911), Pietra (1915), Bon-

¹Con cadenza annuale fino al 1987 e biennale successivamente.

ferroni (1930) e Gini (1910, 1914). Fuori l'ambito italiano, assumono rilievo i contributi di studiosi quali Edgeworth (1898), March (1898), Dalton (1920), Frechet (1939), Mandelbrot (1960, 1963), Dagum (1977, 1980, 1990), e Sen (1973, 1982). In letteratura esistono diversi indici di ineguaglianza: occorre tuttavia formulare una prima distinzione tra indici puntuali e indici globali. Se gli indici puntuali forniscono informazioni sull'ineguaglianza al variare del livello di reddito considerato, gli indici globali invece, rappresentano una misura del livello di ineguaglianza relativa alla totalità della popolazione. Esempi di indici globali sono l'indice G di Gini, l'indice P di Pietra e I di Zenga.

Attualmente le principali metodologie utilizzate per lo studio dell'ineguaglianza sono la curva di Lorenz (1905), e l'indice di concentrazione G di Gini. Grande rilevanza assumono altresì le curve di Bonferroni (1930) e le curve $\lambda_{(p)}$ e $Z_{(p)}$ proposte da Zenga nel 1984. Se le curve $L_{(p)}$ di Lorenz e $B_{(p)}$ di Bonferroni hanno un andamento predeterminato, ciò non accade per le curve $\lambda_{(p)}$ e $Z_{(p)}$: questa importante proprietà caratterizza anche la recente curva $I_{(p)}$ introdotta da Zenga nel 2007 di cui diremo più avanti.

Dalle curve $\lambda_{(p)}$ e $Z_{(p)}$, si ottengono gli indici globali λ e ξ . La curva $Z_{(p)}$ e l'indice ξ sono stati ampiamente studiati da Zenga (1984, 1990, 1991a, 1991b), Salvaterra (1987, 1990), Grassini (1987), Pollastri (1987), Dancelli (1989, 1990), Poliscchio (1993a, 1993b), Berti e Rigo (2006). Per un maggior approfondimento sulla curva $Z_{(p)}$ e sull'indice ξ si veda Kleiber e Kotz (2003).

Recentemente, Zenga (2007) ha proposto la nuova curva di ineguaglianza $I_{(p)}$ basata sul rapporto tra la media aritmetica del gruppo inferiore ($Y \leq y_{(i)}$) e la media aritmetica del gruppo superiore ($Y > y_{(i)}$). Dalla curva $I_{(p)}$ si ottiene l'indice sintetico I di Zenga. Esiste già un'ampia letteratura sull'indice I di Zenga. Contributi importanti sono da attribuire a Poliscchio (2008a) che ha mostrato che solo per la distribuzione di Pareto troncata con parametro di ineguaglianza $\theta = 0.5$ il valore dell'indice puntuale di ineguaglianza è costante. Inoltre Poliscchio & Maffeni (2010) hanno confrontato la curva di Lorenz e la curva di Zenga nel caso di traslazioni e di trasferimenti egualitari. Porro (2011) ha analizzato i modelli distributivi con curva $I_{(p)}$ lineare estendendo quindi il caso uniforme studiato da Poliscchio (2008a). Poliscchio & Porro (2010, 2011) hanno anche analizzato il comportamento delle curve di Lorenz e di Zenga nel caso di alcune variabili casuali continue. Zenga Ma. (2008) ha proposto un'estensione dell'indice I e della curva $I_{(p)}$ al caso di variabili

non economiche. Alcuni risultati inferenziali sull'indice I nel caso di campionamento da modelli continui sono stati ottenuti da Greselin & Pasquazzi (2008, 2009) e da Greselin *et altri* (2009, 2010). Langel & Tillé (2011) hanno ottenuto, nel caso di piani di campionamenti complessi, la varianza di uno stimatore dell'indice I di Zenga.

Una caratteristica importante di una misura di ineguaglianza è la sua idoneità ad essere scomposto nei gruppi e fra gruppi ed ad essere scomposto secondo le componenti del reddito. Radaelli (2006, 2008) ha ottenuto la scomposizione per gruppi degli indici puntuali I_i e sintetico I . Radaelli (2010) ha confrontato inoltre, la scomposizione per gruppi dell'indice G Gini da lui proposta con quella ottenuta in riferimento all'indice I di Zenga.

Zenga M.M., Radaelli P., Zenga Ma., (2012) hanno ottenuto la scomposizione per fonti di reddito dell'indice di ineguaglianza I .

La struttura del presente lavoro di tesi è la seguente: nella prima parte che si compone di 3 capitoli, si tratteranno le linee metodologiche e storiche delle indagini campionarie sui bilanci delle famiglie italiane condotte dalla Banca d'Italia dall'inizio degli anni '60 fino all'ultima indagine disponibile dell'anno 2010. In particolare, se il primo capitolo verte proprio sugli aspetti appena richiamati delle indagini suddette, il secondo invece, riguarda la definizione della curva di ineguaglianza $I_{(p)}$ e dell'indice sintetico I di Zenga introdotti per la prima volta da Zenga nel 2007. Nel terzo capitolo si discutono i risultati empirici riguardo le serie storiche prese in esame considerando tre diverse definizioni di reddito familiare disponibile netto. In particolare, per i redditi familiari equivalenti, le analisi empiriche si caratterizzano per alcuni interessanti risultati connessi alla nozione di povertà relativa.

La seconda parte si compone di tre capitoli: nel quarto capitolo viene presentata la scomposizione per fonti di reddito dell'indice sintetico I di Zenga tenendo conto della recentissima pubblicazione (Zenga *et altri*, 2012), mentre nel quinto capitolo si presentano i risultati empirici relativi ai dati temporali delle indagini sopra richiamate. Le conclusioni del sesto capitolo concludono il lavoro.

Capitolo 1

Indagine sui bilanci delle famiglie italiane: aspetti storici e metodologici

1.1 Introduzione

L'indagine campionaria sui bilanci familiari italiani, condotta dalla Banca d'Italia, nasce nei primi anni sessanta con l'obiettivo di raccogliere informazioni sui redditi e i risparmi delle famiglie. Nel corso degli anni l'oggetto della rilevazione si è andato estendendo per includere anche la ricchezza e altri aspetti inerenti i comportamenti economici e finanziari delle famiglie, come ad esempio l'uso dei mezzi di pagamento. Nel periodo 1965 – 1972 sono state intervistate mediamente 3000 famiglie, mentre nelle indagini dal 1987 al 2010 la numerosità campionaria delle famiglie intervistate è stata di circa 8.000 famiglie¹, distribuite in circa 300 comuni italiani. I risultati dell'indagine vengono regolarmente pubblicati nei Supplementi al Bollettino Statistico della Banca d'Italia sin dal 1965. I dati raccolti presso le famiglie, in forma anonima, sono disponibili gratuitamente per elaborazioni e ricerche. E' importante rilevare che la distribuzione dei microdati, attraverso due tipologie di archivi, quello storico e quelli annuali, è riferita alle indagini a partire dal 1977, mentre per le indagini dal 1965 al 1976, i dati raccolti non sono disponibili. Tuttavia, solo a partire dall'indagine relativa al 1989, i dati pubblicati si presentano

¹Per l'indagine del 1998 il numero di famiglie intervistate è stato pari a 7147.

in forma più dettagliata negli archivi annuali. In particolare, gli archivi riferiti alle indagini del periodo 1977 – 2010 riportano le informazioni sui seguenti aspetti:

- i caratteri anagrafici e lo status occupazionale dei singoli componenti;
- i redditi (da lavoro dipendente e indipendente, da pensione, da trasferimenti, da capitale) percepiti dai componenti del nucleo familiare;
- i consumi (durevoli e non durevoli);
- i beni immobili abitati o posseduti dai membri della famiglia;
- le attività e passività finanziarie detenute dalla famiglia;

Nel presente capitolo si tratteranno i tratti fondamentali, sia dal punto di vista storico che metodologico, dell'indagine campionaria sui bilanci delle famiglie italiane che la Banca d'Italia conduce sin dal 1965 con cadenza annuale fino al 1987 e biennale successivamente².

1.2 Indagini campionarie nel ventennio 1965 - 1985

La prima indagine campionaria condotta dalla Banca d'Italia sui redditi e risparmi delle famiglie italiane risale al 1965. Le poche informazioni disponibili sono sintetizzate nel Bollettino statistico *Reddito, risparmio e alcuni consumi delle famiglie italiane* pubblicato nel 1966. In riferimento al piano di campionamento, si legge che si fece ricorso ad un campionamento a due stadi con scelta casuale al primo stadio dei comuni stratificati secondo la regione geografica e la classe di ampiezza demografica e successivamente, nell'ambito dei comuni scelti si estrassero a sorte dalle liste elettorali le famiglie da intervistare.

Già nell'indagine del 1966 vengono apportati dei miglioramenti alla metodologia di rilevazione dei dati. In particolare, al fine di migliorare la qualità dei dati, vengono apportate alcune correzioni, mediante il calcolo di opportune ponderazioni delle medie delle variabili oggetto di stima, alle distorsioni legate da una parte alle mancate risposte, dall'altra alla più alta probabilità di estrazione per le famiglie con un più elevato numero di componenti in età maggiore di 21 anni. Nell'indagine relativa

²Non è stata effettuata alcuna indagine per il 1985 ed è intercorso un intervallo di tre anni tra l'indagine per il 1995 e quella per il 1998. L'ultima indagine disponibile si riferisce all'anno 2010.

al 1967 invece, ulteriori affinamenti nella metodologia di rilevazione, si riscontrano nelle modifiche apportate al questionario al fine di rilevare con maggiore precisione il fenomeno del risparmio.

Se le indagini relative al 1968 ed al 1969 vengono condotte con criteri sostanzialmente analoghi a quelli degli anni precedenti, in quelle relative al 1971 ed al 1972, con l'obiettivo di evidenziare le eventuali differenze strutturali che caratterizzano i diversi livelli regionali di reddito, il territorio nazionale viene suddiviso in due zone (Centro-Nord, Sud-Isole). Tuttavia, poiché per alcuni fenomeni le frequenze erano statisticamente insufficienti, nel 1971 e nel 1972 si fece ricorso ad un sovracampionamento nel Mezzogiorno³.

A partire dalla rilevazione del 1973, per focalizzare l'indagine sugli aspetti finanziari dei bilanci familiari delle famiglie si è operata una trasformazione del metodo di campionamento e della tecnica di rilevazione⁴ facendo ricorso ad un sovracampionamento nella fascia di popolazione con reddito più elevato⁵. In particolare, si è proceduto ad effettuare due indagini. La prima *generale* che è stata condotta secondo i criteri degli anni precedenti, ed una seconda *speciale* che ha interessato una quota di famiglie caratterizzate da un alto livello di reddito. In sede di elaborazione poi, i dati relativi all'indagine *speciale* sono stati riponderati sulla base di parametri territoriali e sociali. Anche il questionario è stato ristrutturato, secondo i seguenti criteri:

- scomposizione dei fenomeni da rilevare nelle loro componenti elementari;
- rilevazione delle diverse fonti di reddito e di risparmio;
- il risparmio è stato ottenuto rilevando, per le varie componenti, sia il flusso annuo sia la differenza tra le consistenze all'inizio e alla fine dell'anno;
- il questionario viene modificato per adattarsi alle diverse situazioni familiari ed individuali prevedendo per esempio una serie di allegati per la rilevazione quantitativa dei fenomeni.

³Per maggiori dettagli si rinvia all'articolo *Reddito, risparmio e ricchezza delle famiglie italiane negli anni 1970 e 1971*, estratto dal Bollettino della Banca d'Italia n. 3-4, 1973.

⁴Per approfondimenti si veda *Reddito, risparmio e ricchezza delle famiglie italiane negli anni 1973 e 1974*, Bollettino della Banca d'Italia n. 4, 1976.

⁵Sulla base delle indagini degli anni precedenti si sono ricavate le caratteristiche socio-demografiche delle famiglie ad alto reddito.

Se per le indagini relative al 1974 ed al 1975 non si è registrata nessuna modifica in termini di metodologia di campionamento, e di tecniche di rilevazione rispetto all'anno precedente, per il 1976, le modifiche apportate riguardano la definizione delle variabili oggetto di rilevazione (risparmio, patrimonio, reddito). In particolare, per la variabile reddito, vengono dettagliate le fonti:

- i redditi da lavoro autonomo al netto degli oneri sociali e delle imposte trattenute alla fonte;
- i redditi da lavoro autonomo al netto delle imposte pagate nell'anno. Non sono compresi gli autoconsumi (rilevanti soprattutto nel settore agricolo) perché di difficile rilevazione;
- i redditi da capitale, per esempio affitti di immobili. Gli interessi e i dividendi non sono stati rilevati a causa della elevata reticenza riscontrata nelle indagini precedenti;
- i redditi da trasferimenti comprendenti pensioni, assistenza sociale, liquidazioni, borse di studio ed altre entrate come per esempio vincite al gioco, eredità.

Il reddito familiare è dato dalla somma dei redditi di ciascun percettore della famiglia.

Dopo la ristrutturazione del 1976 non si registrano particolari modifiche per le indagini nel periodo 1977 – 1984.

In particolare, nella tredicesima indagine campionaria (1977) sul risparmio ed il reddito delle famiglie italiane, si registrano variazioni marginali in termini di variabili rilevate. Infatti vengono rilevati per esempio, per la prima volta, sesso ed età dei componenti della famiglia ed inoltre vengono intervistati tutti i percettori di reddito prescindendo dall'età e dall'importo del reddito percepito.

Le indagini del triennio 1978 – 1980 non sono interessate da variazioni nelle tecniche di rilevazione e nel disegno campionario. Nel 1980 tuttavia, si aggiunge nel questionario una sezione dedicata alle spese per consumi al fine di acquisire informazioni più complete sui bilanci familiari

Nell'indagine riferita al 1981 la metodologia di rilevazione subisce modifiche: ampliamento numerosità campionaria e stratificazione del campione allo scopo di analizzare le variabili più significative anche a livello regionale. Il campione costituito da circa 4000 famiglie estratte casualmente dalle liste elettorali secondo un

campionamento a due stadi è stratificato in 17 aree geografiche⁶ ed in 5 ampiezze demografiche di comuni.

Se per l'indagine sul 1983 non vengono apportate modifiche, per il 1982 invece, si interviene sulla struttura del questionario: vengono inserite due domande relative agli interessi attivi percepiti nell'anno sui depositi bancari e sui titoli di stato; inoltre, viene ristrutturata la sezione relativa al risparmio al fine di evidenziare meglio i flussi degli strumenti finanziari delle famiglie.

L'indagine relativa al 1984 (la ventesima in ordine cronologico) si colloca in una fase di transizione: infatti si decide di sottoporre ad un attento riesame il disegno campionario, il questionario e la tecnica di rilevazione con gli obiettivi di pervenire ad una definizione delle variabili rilevate che sia più direttamente confrontabile con la contabilità nazionale e di definire un piano di campionamento più efficiente e privo di distorsioni dovuti alla scelta non casuale dei comuni appartenenti al campione⁷.

1.3 Indagine relativa all'anno 1986: inizio di un nuovo ciclo

Con l'indagine campionaria sui bilanci delle famiglie italiane relativa all'anno 1986, si apre un nuovo ciclo caratterizzato da profonde modifiche volte a riorganizzare il disegno campionario, il questionario e la tecnica di rilevazione. Una esemplificazione degli aspetti sopra menzionati appare fondamentale.

⁶Nelle indagini precedenti il campione veniva stratificato in 10 aree geografiche.

⁷L'indagine successiva, la ventunesima, è nel 1986: data la portata dei cambiamenti introdotti, è necessario delinearne gli aspetti essenziali nel paragrafo seguente.

1.3.1 Disegno campionario

A differenza delle precedenti indagini (dal 1965 al 1983)⁸, le unità primarie di campionamento sono estratte casualmente sulla base di un disegno campionario a più stadi, con stratificazione delle unità al primo stadio⁹. (Si veda la tabella seguente).

Ripartizioni geografiche	Classi di ampiezza comunale (n. abitanti)		
	<i>fino a 20.000</i>	<i>da 20.000 a 40.000</i>	<i>oltre 40.000</i>
1. Piemonte e Val d'Aosta	Strato 1	Strato 2	Strato 3
2. Lombardia	Strato 4	Strato 5	Strato 6
-	-	-	-
-	-	-	-
-	-	-	-
17. Sardegna	Strato 49	Strato 50	Strato 51

Tabella 1.1: Criterio di stratificazione dei comuni - Unità al I stadio.

I comuni italiani sono inizialmente ripartiti in 51 strati definiti, per ciascuna regione¹⁰ sulla base delle seguenti classi di ampiezza demografica:

A: comuni con più di 40.000 abitanti;

B: comuni compresi tra 20.000 e 40.000 abitanti;

C: comuni fino a 20.000 abitanti;

Ogni unità del gruppo A è inserita nel campione; le unità del gruppo B sono estratte con probabilità proporzionale alla loro ampiezza demografica. Le unità del gruppo

⁸Già con l'indagine relativa al 1984 vengono apportate modifiche ai criteri di formazione del campione, e l'estrazione delle famiglie è effettuata, grazie alla collaborazione dell'ISTAT, dalle liste anagrafiche. Viene così eliminata la distorsione che caratterizza la indagini fino al 1983, determinata dalle estrazioni casuali dalle liste elettorali, con la conseguente sovrarappresentazione delle famiglie più numerose, in quanto queste ultime erano caratterizzate dalla maggiore probabilità di essere estratte. Inoltre, a causa della correlazione positiva tra il reddito familiare ed il numero di componenti la famiglia, l'estrazione dalle liste anagrafiche ha consentito di migliorare la stima del reddito medio.

⁹Il nuovo piano di campionamento è condotto in collaborazione con l'Istituto Centrale di Statistica.

¹⁰Le regioni: Piemonte, Val d'Aosta; Abruzzo, Molise; Basilicata, Calabria costituiscono tre soli strati.

C sono ulteriormente stratificate per altimetria e attività economica prevalente della popolazione in esse residente; la selezione, come per le unità appartenenti al gruppo B, è casuale con probabilità proporzionale all'ampiezza demografica del comune. Le modifiche apportate al metodo di selezione delle unità al primo stadio hanno permesso di eliminare le distorsioni determinate dal precedente criterio di selezione, che contribuiva alla sovra-rappresentazione delle unità primarie di dimensioni maggiori in termini di famiglie. Infatti, la distribuzione per ampiezza dei punti di campionamento, in origine estratti casualmente, si era in parte modificata a seguito della sostituzione di alcuni comuni di piccole dimensioni. Inoltre, poiché la maggior parte delle unità primarie non era stata sostituita nel corso degli anni, il campione risultava rappresentativo solo delle famiglie residenti nei comuni selezionati e non del complesso della popolazione italiana. Le rilevanti modifiche al piano di campionamento hanno anche richiesto una variazione al piano di ponderazione. Infatti, i pesi a livello familiare, sono rideterminati sia tenendo conto della probabilità di estrazione dei comuni all'interno di ciascuno strato, sia della probabilità di estrazione di ogni famiglia all'interno dei comuni. Tali pesi sono infine corretti tenendo conto delle mancate risposte delle famiglie (per rifiuto dell'intervista o per l'impossibilità di contattare i componenti percettori di reddito) all'interno di ciascun comune facente parte del campione. La ridefinizione dei criteri di stratificazione e del metodo di selezione delle unità di campionamento, nonché l'ampliamento della numerosità campionaria da 4000 a 8000 famiglie, hanno consentito, rispetto alla precedente indagine, la riduzione della variabilità delle stime delle principali grandezze rilevate. A titolo esemplificativo, si veda la tabella seguente:

Variabili	Errore standard	
	<i>Indagine 1984</i>	<i>Indagine 1986</i>
Reddito	3,0	2,2
Consumo	2,5	1,8
Ricchezza reale	5,7	5,0

Tabella 1.2: Errori standard delle medie delle principali grandezze rilevate (a livello familiare)

Gli errori standard, espressi in percentuale della stima dei valori medi, sono diminuiti rispettivamente da 3 a 2,2 e da 2,5 a 1,8 per le variabili reddito e consumo.

Tali riduzioni sono dell'ordine previsto sulla base delle informazioni, relative alla variabilità delle stime, elaborate sui dati della precedente indagine campionaria. L'errore standard del valore medio della ricchezza reale è invece diminuito passando da 5,7 a 5, in misura inferiore rispetto a quella attesa.

1.3.2 Questionario

La struttura del questionario rimasta sostanzialmente invariata a partire dall'indagine campionaria relativa all'anno 1973, ha subito un profondo cambiamento. Le sezioni del questionario volte alla rilevazione delle attività finanziarie (possesso di attività e risparmio) sono state temporaneamente soppresse a causa della elevata reticenza delle famiglie a fornire informazioni su tali variabili. Per quanto riguarda il reddito da attività finanziarie si è cercato di limitare la diffidenza delle famiglie confermando più volte la segretezza dell'informazione statistica; il questionario è stato inoltre modificato per consentire che ogni percettore di reddito potesse fornire informazioni sulle proprie entrate da attività finanziarie, qualora il capofamiglia non fosse a conoscenza dell'ammontare di tali redditi. Per pervenire ad aggregati più direttamente confrontabili con la contabilità nazionale, sono stati rilevati i dividendi e si è provveduto a distinguere le entrate in conto capitale da quelle in contro reddito; inoltre è stata modificata l'aggregato risultato di gestione: pertanto, nell'indagine 1986, risultano compresi tra le entrate delle famiglie i redditi derivanti da proprietà o gestione di imprese individuali e società di persone fino a 20 addetti. Infine, sono state ampliate le sezioni del questionario finalizzate alla rilevazione del patrimonio immobiliare ed è stata sensibilmente ridotta la sezione dedicata alla spesa per consumo, non costituendo quest'ultima un obiettivo dell'indagine. Difatti la rilevazione sui consumi serve, principalmente per controllare, sulla base della relazioni reddito - consumi, la qualità delle informazioni rilevate.

1.4 La componente *panel* nel nuovo disegno campionario

A partire dall'indagine relativa al 1989, la Banca d'Italia, secondo una consolidata tradizione di revisione metodologica, introduce nel piano di campionamento,

da sempre di tipo trasversale o cross-section¹¹, una quota di famiglie già intervistate nelle indagini precedenti. Essa viene perciò connotata da una nuova caratteristica propria delle indagini di tipo longitudinale, ossia la presenza di una parte *panel* nel campione. Al fine di inquadrare la portata della innovazione metodologica, è utile una breve descrizione delle integrazioni apportate al disegno campionario.

La presenza della parte *panel*, se da un lato, apre la strada ad una migliore comprensione della evoluzione temporale dei fenomeni socio-economici oggetto dell'indagine (variazioni lorde, aggregazioni dei dati in funzione del tempo,...), dall'altro, in tema di qualità dei dati, oltre agli errori non campionari tipici delle indagini cross-section e longitudinali, è soggetta ad ulteriori specifici errori, tra i quali si ricordano:

Effetto condizionamento: dovuto al fatto che un soggetto reintervistato conserva memoria della intervista precedente ed adegua le sue risposte attuali alla esperienza passata sia tentando di accorciare i tempi dell'intervista, evitando risposte che implicino ulteriori domande, sia preparandosi a fornire dati in maniera più ragionata rispetto al passato. Ciò, ovviamente rende meno corretto il confronto temporale del fenomeno osservato.

Non risposta longitudinale: si verifica quando un intervistato facente parte del *panel* relativo ad un periodo precedente non risponde a tutte o a parte delle indagini successive. Oltre alla classica non risposta trasversale, si aggiunge, quindi un altro tipo di non risposta che proviene dalla parte *panel* del campione. Come in tutti i casi di non risposta, si procede al trattamento dei dati mancanti o attraverso la ponderazione o attraverso l'imputazione, a seconda che si tratti di mancate risposte totali o parziali. Nella fattispecie delle indagini longitudinali, nel caso di mancate risposte totali, si accetta, in pratica, la riduzione della numerosità del *panel*, provvedendo alla rettifica dei pesi relativi per tener conto della struttura modificata del *panel* stesso, mentre, nel caso di mancate risposte parziali, si procede a sostituire i dati mancanti con quelli forniti dallo stesso intervistato nelle indagini in tempi adiacenti. La scelta effettuata dalla banca d'Italia, in riferimento alle problematiche legate

¹¹Nelle indagini di tipo trasversale, l'obiettivo è quello di stimare le caratteristiche di interesse riferite ad un particolare momento o periodo di tempo. Al contrario, nelle indagini longitudinali, l'obiettivo è principalmente rivolto a misurare l'evoluzione nel tempo delle caratteristiche di interesse mediante l'espedito di ricontattare le unità per analizzarne le eventuali variazioni.

alle mancate risposte, è stata quella della sostituzione delle famiglie *panel* non disponibili ad ulteriori collaborazioni, con altre famiglie estratte casualmente dagli stessi comuni etichettati *panel*. E' importante sottolineare che l'introduzione della quota *panel*, o più in generale le modificazioni al disegno campionario, comportano generalmente delle rettifiche nel vettore dei pesi da assegnare alle unità statistiche rispetto al campione precedente la modifica. Nel campionamento a due stadi quale quello della Banca d'Italia ma anche di altre consolidate ed importanti indagini come la Rilevazione delle forze lavoro e l'indagine dei consumi dell'ISTAT, ad ogni unità statistica, la famiglia nel caso dell'indagine campionaria in esame, viene assegnato un peso pari all'inverso della probabilità di estrazione all'interno del disegno campionario che segue uno schema a due stadi (comuni e famiglie), con stratificazione delle unità al primo stadio secondo la regione e la classe di ampiezza demografica del comune. La procedura¹² di stima della media delle variabili di interesse, può essere schematizzata in 3 fasi:

- 1. Calcolo dei pesi campionari delle famiglie.** In un campionamento a due stadi con stratificazione delle unità al primo stadio, una stima del valore medio della variabile x , è data da:

$$\bar{x} = \frac{\sum_h \sum_i \sum_j x_{hij} \cdot w_{hij}}{\sum_h \sum_i \sum_j w_{hij}}, \quad h = 1, \dots, H, \quad i = 1, \dots, a_h, \quad j = 1, \dots, n_{hi} \quad (1.1)$$

dove x_{hij} indica il valore assunto dalla variabile x per la j - esima famiglia rilevata nell' i - esimo comune dell' h - esimo strato e w_{hij} indica il peso da attribuire alla medesima famiglia in base alle probabilità di estrazione¹³. In particolare, lo schema campionario adottato rende i pesi delle unità nei due stadi costanti a livello di comune:

¹²Per ulteriori dettagli circa le stime campionarie dell'ultima indagine disponibile si veda *I bilanci delle famiglie italiane nell'anno 2010*, Supplementi al Bollettino Statistico della Banca d'Italia n. 6, 2012.

¹³Per una descrizione dettagliata della struttura di ponderazione adottata nelle indagini più recenti e degli effetti dei pesi sulla varianza campionaria degli stimatori si veda I. Faiella e R. Gambacorta, *The weighting process in the SHIW*, Banca d'Italia, Temi di discussione, n. 636, 2007.

$$w_{hij} = w_{hi} = \begin{cases} \frac{P_h}{\sum P_{hi}} \cdot \frac{P_{hi}}{n_{hi}} & \text{per i comuni con pi\`u di 40.000 abitanti,} \\ \frac{1}{m_h} \cdot \frac{P_h}{n_{hi}} & \text{per i comuni fino a 40.000 abitanti,} \end{cases} \quad (1.2)$$

dove P_h , $\sum P_{hi}$ e m_h sono rispettivamente la popolazione residente nell' h -esimo strato, quella dei comuni oggetto di rilevazione e il numero di comuni campione nell' h -esimo strato; infine, P_{hi} ed n_{hi} indicano rispettivamente la popolazione e il numero di componenti intervistati nell' i -esimo comune dell' h -esimo strato.

- 2. Stratificazione a posteriore delle famiglie *panel*.** Le famiglie *panel* possono presentare caratteristiche socio-demografiche in parte diverse rispetto a quelle dell'intero campione sostanzialmente a causa del processo di deterioramento della componente *panel* legato alla non partecipazione in successive indagini. Per correggere tale possibile fonte di distorsione delle stime, si procede a una stratificazione a posteriori della parte *panel* del campione sulla base di alcune caratteristiche relative alla precedente indagine (area geografica, classi di reddito, condizione professionale del capofamiglia, etc.) che modifica il peso iniziale di tale sottoinsieme di famiglie.
- 3. Stima degli aggregati (reddito, ricchezza, consumi).** Il calcolo dei pesi (1.2) è effettuato disgiuntamente sulla parte *panel* e *non-panel* del campione. La stima fornita dalla (1.1) diviene dunque:

$$\bar{x} = Q (\bar{x}^q) + P (\bar{x}^p), \quad (1.3)$$

dove P indica la quota di famiglie *panel*, $Q = 1 - P$ quella delle famiglie *non-panel*, e \bar{x}^q e \bar{x}^p le medie della variabile x per i rispettivi sottoinsiemi, calcolate tenendo conto dei pesi (1.2). In presenza di correlazione tra i valori assunti dalla stessa variabile x in due rilevazioni consecutive, la stima fornita dalla (1.3) non è ottimale in termini di efficienza. La stima ottima della media di x al tempo t è invece data da:

$$\bar{x}_t^* = a (\bar{x}_t^q) + (1 - a) [\bar{x}_t^p + r (\bar{x}_{t-1} - \bar{x}_{t-1}^p)], \quad (1.4)$$

dove

$$a = \frac{Q(1 - r^2q)}{1 - r^2Q^2},$$

ed r indica il coefficiente di correlazione tra \bar{x}_t e \bar{x}_{t-1} .

La stima fornita dalla (1.4) si presenta non più come media ponderata dei valori rilevati al tempo t , giacchè fa riferimento, oltre che al coefficiente di correlazione r , anche ai valori medi assunti nella rilevazione precedente dalla variabile x per la parte *panel* e per il totale del campione. In particolare, la stima della media della variabile x fornito dalla (1.4), può essere vista come una stima *composta*¹⁴. pari alla media ponderata di due stime corrette: la prima utilizza le informazioni su x_t disponibili per il campione di famiglie *non-panel*; la seconda è basata sia sui dati relativi a x_t per la componente *panel* del campione, sia sulle variazioni intercorse tra le due rilevazioni, corrette attraverso uno stima per regressione¹⁵ per tener conto della differenza tra il totale del campione e la parte *panel*. A seguito della stratificazione a posteriori descritta al punto 2, per le principali variabili oggetto di rilevazione, si verifica che:

$$\bar{x}_{t-1} \cong \bar{x}_{t-1}^p, \quad (1.5)$$

e quindi la stima fornita dalla (1.4) si semplifica in :

$$\bar{x}_t^* = a(\bar{x}_t^d) + (1 - a)\bar{x}_t^p. \quad (1.6)$$

1.5 Indagine relativa al 1998: introduzione della rilevazione CAPI

Al fine di migliorare la comparabilità nel tempo dei risultati e per consentire l'analisi delle dinamiche temporali delle variabili rilevate, nelle indagini relative al

¹⁴La classe degli stimatori composti è utilizzata nella letteratura della stima per piccole aree per combinare stime dirette e indirette col fine di minimizzarne l'errore quadratico medio. Si veda per un'introduzione a questi stimatori M. Ghosh e J.N.K. Rao, *Small area estimation: An appraisal, in Statistical Science, vol 9, n.1, 1994, pp.55-93*. Per un'applicazione alla stima in presenza di misurazioni ripetute nel tempo si veda C. Särndal, B. Swensson e J. Wretman, *Model Assisted Survey Sampling*, Berlin, Springer-Verlag, 1992

¹⁵La componente tra parentesi quadre della stima fornita dalla (1.4).

1991 ed al 1993 si allarga la quota di famiglie *panel* passando dal 14,5% al 26,7% per il 1991 fino al 42,9% per l'anno 1993.

Se nel 1995 non si registrano variazioni in tema di schema di campionamento, tecniche di rilevazione dei dati rispetto al 1993, nell'indagine relativa al 1998, la tradizionale metodologia impiegata per la rilevazione dei dati basata sul questionario cartaceo (rilevazione PAPI, cioè *Paper and Pencil Personal Interviewing*), viene modificata prevedendo, per circa due terzi del campione, la rilevazione con l'aiuto del computer (CAPI, *Computer-Assisted Personal Interviewing*)¹⁶. Con questa metodologia i dati vengono rilevati presso le famiglie mediante un questionario elettronico, un vero e proprio programma che, oltre a memorizzare le informazioni, aziona una serie di controlli sui dati immessi consentendo di risolvere, alla presenza della famiglia, le eventuali incoerenze che si riscontrino nei dati¹⁷. In questo modo si raggiunge una più elevata qualità dei dati, sia pure al prezzo di una onerosa fase di programmazione del questionario. Le restanti interviste realizzate con un questionario cartaceo (circa un terzo del totale) vengono successivamente trasferite su supporto elettronico dalla società di rilevazione, utilizzando il programma CAPI come maschera di immissione dei dati.

Le successive sei indagini sui bilanci familiari (dal 2000 al 2010) mostrano una sostanziale stabilità sia in termini di numerosità campionaria sia in termini di piano di campionamento e questionario.

Tuttavia, si registra da una parte, un incremento delle quote *panel* e dall'altro, un sempre maggiore utilizzo della tecnica CAPI. In particolare, nell'indagine del 2010¹⁸, le quote *panel* e CAPI, sono pari rispettivamente al 58,1% e all' 84,4%.

¹⁶Le interviste effettuate tramite la metodologia CAPI sono risultate 4850, pari al 67,9 per cento. Nella precedente indagine la metodologia di rilevazione CAPI era stata sperimentata su circa 200 famiglie al di fuori del campione.

¹⁷Numerose sono le cause alla base delle incoerenze che caratterizzano i dati rilevati: da parte dell'intervistato possono esserci problemi di comprensione della domanda, di memoria nel fornire una risposta adeguata o anche reticenza nel fornire informazioni percepite come riservate; da parte dell'intervistatore gli errori più frequenti riguardano la digitazione dei codici di risposta o la scrittura dei valori in un'unità di misura diversa da quella prevista nel questionario.

¹⁸Per maggiori approfondimenti si veda *I bilanci delle famiglie italiane nell'anno 2010*, Supplemento al Bollettino Statistico, Banca d'Italia n. 6, 2012.

Capitolo 2

La curva $I_{(p)}$ e l'indice sintetico I di ineguaglianza di Zenga

Nel 2007, Zenga ha introdotto una nuova curva di ineguaglianza ed un nuovo indice di ineguaglianza. In questo capitolo si tratteranno le linee essenziali di entrambe e si preciseranno le proprietà dell'indice I .

2.1 Notazione

Si considerino le s coppie:

$$\left\{ (x_j, n_j) : j = 1, \dots, s; 0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_s; \sum_{j=1}^s n_j = N \right\} \quad (2.1)$$

che rappresentano la distribuzione di frequenze della variabile non negativa X che assume i valori non negativi x_j , ($j = 1, \dots, s$) con frequenze assolute n_j , ($j = 1, \dots, s$). Siano inoltre:

- la frequenza cumulata associata al valore x_j ,

$$N_j = \sum_{i=1}^j n_i, \quad j = 1, \dots, s;$$

- il totale delle frequenze,

$$N = N_s = \sum_{i=1}^s n_i; \quad (2.2)$$

- la frequenza relativa cumulata in corrispondenza del valore x_j ,

$$p_j = \frac{N_j}{N}, \quad j = 1 \dots, s; \quad (2.3)$$

- la somma cumulata dei prodotti $x_i n_i$ fino all'indice j ,

$$Q_j = \sum_{i=1}^j x_i n_i, \quad j = 1 \dots, s; \quad (2.4)$$

- la somma totale e la media aritmetica dei valori $x_i n_i$,

$$T = Q_s = \sum_{i=1}^s x_i n_i, \quad M = \frac{T}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^s x_i n_i. \quad (2.5)$$

Per ogni $j = 1, \dots, s$ fissato, è possibile dividere gli s valori $\{x_1, x_2, \dots, x_s\}$ in due gruppi disgiunti:

1. il gruppo *inferiore* costituito dalle j coppie $\{(x_1, n_1), \dots, (x_j, n_j)\}$,
2. ed il gruppo *superiore* costituito dai restanti valori presi con le relative frequenze associate e dal valore x_{s+1}^* che è un qualsiasi valore maggiore o uguale a x_s (per convenzione, tale valore viene posto uguale a x_s), a cui viene associata una frequenza nulla $\{(x_{j+1}, n_{j+1}), \dots, (x_s, n_s), (x_{s+1}^*, 0)\}$.

In corrispondenza dei gruppi *inferiore* e *superiore*, è possibile calcolare le medie aritmetiche inferiore $\bar{M}_{(p_j)}$ e superiore $\overset{+}{M}_{(p_j)}$ definite nel seguente modo:

$$\bar{M}_{(p_j)} = \frac{Q_j}{N_j} = \frac{1}{N_j} \sum_{i=1}^j x_i n_i, \quad j = 1, \dots, s, \quad (2.6)$$

dove, con $\bar{M}_{(p_j)}$ si è indicata la media aritmetica del gruppo inferiore calcolata in corrispondenza del valore p_j che, rappresenta la frequenza cumulata relativa in corrispondenza del valore x_j . In altre parole, p_j rappresenta la proporzione di elementi che costituiscono il gruppo inferiore.

$$\overset{+}{M}_{(p_j)} = \begin{cases} \frac{T-Q_j}{N-N_j}, & j = 1, \dots, s-1, \\ x_{s+1}^*, & j = s, \end{cases} \quad (2.7)$$

dove $\overset{+}{M}_{(p_j)}$ indica la media aritmetica del gruppo superiore calcolata in corrispondenza di p_j .

Zenga propone quale misura di ineguaglianza tra il gruppo inferiore $\{(x_1, n_1), \dots, (x_j, n_j)\}$ ed il gruppo superiore $\{(x_{j+1}, n_{j+1}), \dots, (x_s, n_s), (x_{s+1}^*, 0)\}$ l'indice puntuale di ineguaglianza:

$$I_{(p_j)} = \frac{\bar{M}_{(p_j)} - \bar{M}_{(p_j)}}{\bar{M}_{(p_j)}} = 1 - \frac{\bar{M}_{(p_j)}}{\bar{M}_{(p_j)}} = 1 - U_{(p_j)}, \quad j = 1, \dots, s, \quad (2.8)$$

dove il rapporto tra $\bar{M}_{(p_j)}$ e $\bar{M}_{(p_j)}$:

$$U_{(p_j)} = \frac{\bar{M}_{(p_j)}}{\bar{M}_{(p_j)}}, \quad j = 1, \dots, s, \quad (2.9)$$

misura l'uniformità (o uguaglianza) tra il gruppo inferiore e quello superiore e moltiplicato per 100 esprime la percentuale della media $\bar{M}_{(p_j)}$ del gruppo inferiore in termini della media $\bar{M}_{(p_j)}$ del gruppo superiore.

2.2 Il diagramma di ineguaglianza $I_{(p_j)}$

Per tracciare il diagramma di ineguaglianza $I_{(p_j)}$ è necessario determinare le coordinate degli s punti $(p_j, I_{(p_j)})$ e rappresentarli in un piano avente come asse delle ascisse le quantità p_j e come asse delle ordinate le quantità $I_{(p_j)}$. Dalla rappresentazione di tali punti si ottengono s rettangoli contigui: il primo è costituito da tutti i punti con ascissa compresa tra 0 e p_1 e ordinata appartenente all'intervallo $[0, I_{(p_1)}]$. Il j -esimo rettangolo ($j = 1, \dots, s$) è costituito dai punti con ascissa appartenente all'intervallo $[p_{j-1}, p_j]$ ed ordinata compresa nell'intervallo $[0, I_{(p_j)}]$. La somma delle aree degli s rettangoli contigui è data da:

$$I = \sum_{j=1}^s I_{(p_j)} \cdot \frac{n_j}{N}, \quad (2.10)$$

dove I è la media aritmetica pesata delle misure puntuali di ineguaglianza $I_{(p_j)}$ con pesi $\frac{n_j}{N}$ e denota l'indice sintetico di ineguaglianza derivato dal diagramma $I_{(p_j)}$.

2.3 Estensione al caso continuo: la curva di ineguaglianza $I_{(p)}$

Nel paragrafo precedente l'indice sintetico I è stato definito nel contesto discreto. Nel presente paragrafo si farà riferimento invece al caso continuo. Sia X una variabile casuale continua non negativa sul supporto $[a, b]$, ($0 \leq a < b \leq \infty$) con funzione di ripartizione $F(x)$, funzione di densità di probabilità $f(x)$ strettamente positiva e con valore atteso $\mu = E(X)$ finito e positivo. E' facile rendersi conto che le ipotesi specificate assicurano l'invertibilità della funzione di distribuzione F nell'intervallo $[a, b]$, in quanto la densità f , in tale intervallo, è nulla al più in una infinità numerabile di punti.

E' possibile definire la media inferiore, $\bar{\mu}_{(x)}$ e la media superiore, $\overset{+}{\mu}_{(x)}$ nel seguente modo:

$$\bar{\mu}_{(x)} = \frac{1}{F(x)} \int_a^x t f(t) dt, \quad (2.11)$$

$$\overset{+}{\mu}_{(x)} = \frac{1}{1 - F(x)} \int_x^b t f(t) dt. \quad (2.12)$$

Le (2.11), (2.12) sono funzioni del valore di $x \in (a, b)$. Pertanto, in modo del tutto analogo al caso discreto, al fine di ottenere una rappresentazione grafica nel quadrato di lato unitario, è necessario esprimere le medie (2.11), (2.12) in termini di p considerando la trasformazione

$$p = F(x), \quad (2.13)$$

e la sua inversa,

$$x_{(p)} = F^{-1}(p), \quad x \in (a, b), \quad p \in (0, 1). \quad (2.14)$$

Applicando la trasformazione $p = F(x)$ alle (2.11), (2.12) si ottiene:

$$\begin{aligned}
\bar{\mu}_{(x)} &= \bar{\mu}_{(F^{-1}(p))} \\
&= \frac{1}{F(F^{-1}(p))} \int_a^{F^{-1}(p)} t f(t) dt \\
&= \frac{1}{p} \int_0^p F^{-1}(y) dy \\
&= \bar{M}_{(p)},
\end{aligned} \tag{2.15}$$

dove, in analogia al caso discreto, $\bar{M}_{(p)}$ rappresenta la media del gruppo inferiore calcolata nel punto $p \in (0, 1)$.

In riferimento alla media superiore (2.12), si ha:

$$\begin{aligned}
\overset{+}{\mu}_{(x)} &= \overset{+}{\mu}_{(F^{-1}(p))} \\
&= \frac{1}{1 - F(F^{-1}(p))} \int_{F^{-1}(p)}^1 t f(t) dt \\
&= \frac{1}{1 - p} \int_p^1 F^{-1}(y) dy \\
&= \overset{+}{M}_{(p)},
\end{aligned} \tag{2.16}$$

dove, $\overset{+}{M}_{(p)}$ rappresenta la media del gruppo superiore calcolata nel punto $p \in (0, 1)$.

E' dunque possibile definire la curva di ineguaglianza $I_{(p)}$ relativa ad una variabile statistica continua, con $p \in (0, 1)$ nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
I_{(p)} &= 1 - \frac{\bar{M}_{(p)}}{\overset{+}{M}_{(p)}} = 1 - U_{(p)} \\
&= 1 - \frac{1 - p}{p} \cdot \frac{\int_0^p F^{-1}(y) dy}{\int_p^1 F^{-1}(y) dy}, \quad p \in (0, 1).
\end{aligned} \tag{2.17}$$

per ricavare l'indice sintetico di ineguaglianza di Zenga, è necessario calcolare l'area sottesa dalla curva $I_{(p)}$ e pertanto:

$$I = \int_0^1 I_{(p)} dp. \tag{2.18}$$

L'indice sintetico I soddisfa tutte le proprietà che si richiedono usualmente per un indice di ineguaglianza: si rimanda alla bibliografia per un maggior approfondimento.

2.4 Proprietà della curva $I_{(p)}$

Si tratteranno ora le linee essenziali circa le principali caratteristiche della curva $I_{(p)}$ e dell'indice sintetico I . Per ulteriori approfondimenti si rimanda ai numerosi lavori elencati in bibliografia.

2.4.1 Relazione tra la curva $I_{(p)}$ e le curve di ineguaglianza $L_{(p)}$ di Lorenz e $B_{(p)}$ di Bonferroni

Zenga (2007), ha dimostrato il legame esistente tra la curva di ineguaglianza $I_{(p)}$ e la curva $L_{(p)}$ di Lorenz di una variabile statistica continua X di valore atteso finito μ . Prima di mostrare il legame della curva $I_{(p)}$ con le curve $L_{(p)}$ di Lorenz e $B_{(p)}$ di Bonferroni, appare utile fornire l'espressione analitica di $L_{(p)}$ e di $B_{(p)}$ per una variabile casuale non negativa X , dotata di valore atteso finito μ e funzione di distribuzione F . La curva di Lorenz associata a X , può essere definita come:

$$L_{(p)} = \frac{1}{\mu} \int_0^p F^{-1}(t) dt, \quad p \in (0, 1), \quad (2.19)$$

dove F^{-1} indica la funzione di distribuzione inversa di F . Tale curva riveste un ruolo importante in letteratura sia in riferimento ai risultati teorici sia applicativi. Dal rapporto tra l'area di concentrazione (ossia l'area compresa tra la curva $L_{(p)}$ e la retta di equipartizione) e l'area di massima concentrazione si ricava l'importante indice di concentrazione di Gini. La curva di Bonferroni, è invece definita come:

$$B_{(p)} = \frac{1}{\mu p} \int_0^p F^{-1}(t) dt, \quad p \in (0, 1), \quad (2.20)$$

dove, come nel caso della curva di Lorenz, si è indicato con F^{-1} la funzione di distribuzione inversa di F . Dalle (2.19), (2.20), si ricava la relazione tra le curve $L_{(p)}$ e $B_{(p)}$:

$$L_{(p)} = pB_{(p)}, \quad p \in (0, 1). \quad (2.21)$$

Si è ora pronti a definire il legame tra la curva $I_{(p)}$ e le curve di Lorenz e Bonferroni. La media inferiore $\bar{M}_{(p)}$ in funzione della curva di Lorenz è data da:

$$\begin{aligned}
\bar{M}_{(p)} &= \frac{1}{p} \int_0^p F^{-1}(t) dt \\
&= \frac{\mu}{p} \cdot \frac{1}{\mu} \int_0^p F^{-1}(t) dt \\
&= \frac{\mu}{p} \cdot L_{(p)}, \quad \forall p \in (0, 1),
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Dalle note proprietà del valore atteso μ , e tenendo conto della (2.12), si ha:

$$\begin{aligned}
\mu &= \int_0^1 F^{-1}(t) dt \\
&= \int_0^p F^{-1}(t) dt + \int_p^1 F^{-1}(t) dt \\
&= p\bar{M}_{(p)} + (1-p)\overset{+}{M}_{(p)},
\end{aligned} \tag{2.23}$$

da cui segue che:

$$\overset{+}{M}_{(p)} = \frac{\mu - p\bar{M}_{(p)}}{1-p}. \tag{2.24}$$

Dalla definizione della curva $I_{(p)}$ e tenendo conto delle (2.22), (2.24) si ha che:

$$\begin{aligned}
I_{(p)} &= 1 - \frac{\bar{M}_{(p)}}{\overset{+}{M}_{(p)}} \\
&= 1 - \frac{\frac{\mu}{p} \cdot L_{(p)}}{\frac{1}{1-p} \cdot \mu - p\bar{M}_{(p)}} \\
&= 1 - \frac{\frac{\mu}{p} \cdot L_{(p)}}{\frac{\mu}{1-p} [1 - L_{(p)}]} \\
&= 1 - \frac{1-p}{p} \frac{L_{(p)}}{1 - L_{(p)}} \\
&= \frac{p - L_{(p)}}{p [1 - L_{(p)}]}, \quad \forall p \in (0, 1).
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Da $L_{(p)} = pB_{(p)}$ si ricava inoltre che:

$$\begin{aligned}
I_{(p)} &= \frac{p - pB_{(p)}}{p - p^2B_{(p)}} \\
&= \frac{1 - B_{(p)}}{1 - pB_{(p)}}, \quad \forall p \in (0, 1).
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Le relazioni esemplificate rivestono un ruolo importante perchè permettono di esprimere la curva $I_{(p)}$ in funzione di curve di ineguaglianza ampiamente note in letteratura.

2.4.2 L'andamento non preconstituito della curva $I_{(p)}$

Nel panorama delle curve di ineguaglianza, la curva $I_{(p)}$, si caratterizza per il fatto di non essere vincolata a passare per punti prefissati. Talune curve di ineguaglianza hanno restrizioni di questo tipo con perdita talvolta di potere esplicativo. Si consideri per esempio la curva di Lorenz definita dalla (2.19) per la quale valgono i limiti:

$$\lim_{p \rightarrow 0} L_{(p)} = 0, \quad \lim_{p \rightarrow 1} L_{(p)} = 1. \quad (2.27)$$

Dunque qualsiasi curva di Lorenz, indipendentemente dalla distribuzione da cui proviene, è vincolata a passare per i punti predeterminati di coordinate $(0, 0)$ e $(1, 1)$ del piano $(p, L_{(p)})$. Tale caratteristica rende di fatto la curva $L_{(p)}$ poco esplicativa in prossimità dei valori $p = 0$ e $p = 1$, in corrispondenza dei quali si hanno i valori più bassi della variabile di partenza e quelli più alti.

Anche la curva di Bonferroni, definita dalla (2.20) è soggetta alla condizione:

$$\lim_{p \rightarrow 1} B_{(p)} = 1, \quad (2.28)$$

indipendentemente dalla distribuzione da cui proviene. Pertanto anche la curva $B_{(p)}$, come per la curva di Lorenz, perde capacità esplicativa in prossimità dei valori grandi della variabile di origine, ossia quando $p \rightarrow 1$.

Le limitazioni riscontrate per le curve di Lorenz e Bonferroni non riguardano invece la curva $L_{(p)}$. Tale curva infatti, non è a priori vincolata a passare per determinati punti in quanto il suo comportamento agli estremi del dominio, cioè per p che tende a 0 e per p che tende ad 1, dipende dai valori caratteristici (estremi del supporto, valore atteso) della distribuzione della variabile d'origine.

Oltre al suo comportamento agli estremi del dominio, la curva $I_{(p)}$ risulta essere meno soggetta a restrizioni anche per valori di p interni all'intervallo $[0, 1]$. Infatti, in corrispondenza di tali valori il suo comportamento non è prestabilito, ossia, in altre parole, nessun tipo di limitazione è imposta alle sue derivate. Tale caratteristica non è posseduta da tutte le curve di ineguaglianza: esempi importanti provengono

dalle curva $L_{(p)}$ e $B_{(p)}$. Per la curva di Lorenz proveniente da una variabile casuale continua X con densità f e funzione di distribuzione F infatti, esistono i seguenti vincoli alle sue derivate:

$$L'_{(p)} = \frac{d}{dp} L_{(p)} = \frac{1}{\mu} F^{-1}(p) > 0,$$

$$L''_{(p)} = \frac{d^2}{dp^2} L_{(p)} = \frac{1}{\mu} \frac{1}{f[F^{-1}(p)]} > 0.$$

ossia, la curva $L_{(p)}$ è crescente e convessa.

Anche la curva di Bonferroni è sempre crescente in quanto vale sempre la relazione:

$$B'_{(p)} = \frac{d}{dp} B_{(p)} = \frac{1}{\mu p} \left[F^{-1}(p) - \frac{1}{p} \int_0^p F^{-1}(t) dt \right] > 0.$$

Quanto appena visto, evidenzia la maggiore flessibilità della curva $I_{(p)}$ in relazione al suo andamento re conferisce alla stessa maggiore capacità descrittiva rispetto alle altre curve di ineguaglianza presenti in letteratura.

E' interessante chiedersi quali siano i valori assunti dalla curva $I_{(p)}$ in prossimità dei valori $p = 0$ e $p = 1$. A tal proposito, Poliscchio (2008) ha dimostrato che per una variabile casuale non negativa X , dotata di valore atteso finito μ , avente supporto sull'intervallo $[a, b]$, ($0 \leq a < b \leq +\infty$), valgono i seguenti limiti:

$$\lim_{p \rightarrow 0^+} I_{(p)} = 1 - \frac{a}{\mu}, \quad (2.29)$$

$$\lim_{p \rightarrow 1^-} I_{(p)} = 1 - \frac{\mu}{b}, \quad (2.30)$$

con la convenzione:

$$\frac{\mu}{b} = 0, \quad \text{se } b = +\infty.$$

I limiti (2.29), (2.30) si ottengono osservando che:

$$\lim_{p \rightarrow 1^-} \bar{M}_{(p)} = \mu, \quad \lim_{p \rightarrow 0^+} \bar{M}_{(p)}^+ = \mu, \quad (2.31)$$

ed inoltre, applicando De l'Hopital,

$$\lim_{p \rightarrow 0^+} \bar{M}_{(p)} = \lim_{p \rightarrow 0^+} \frac{1}{p} \int_0^p F^{-1}(t) dt = \lim_{p \rightarrow 0^+} F^{-1}(p) = a, \quad (2.32)$$

$$\lim_{p \rightarrow 1^-} \bar{M}_{(p)}^+ = \lim_{p \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-p} \int_p^1 F^{-1}(t) dt = \lim_{p \rightarrow 1^-} F^{-1}(p) = b, \quad (2.33)$$

e ricordando la definizione della curva $I_{(p)}$:

$$I_{(p)} = 1 - \frac{\bar{M}_{(p)}}{\bar{M}_{(p)}^+}.$$

Se il supporto della variabile continua X è tutto R^+ , ossia $a = 0$ e $b = +\infty$, allora i limiti (2.29), (2.30) diventano:

$$\lim_{p \rightarrow 0^+} I_{(p)} = 1, \quad (2.34)$$

$$\lim_{p \rightarrow 1^-} I_{(p)} = 1. \quad (2.35)$$

Capitolo 3

Applicazione

In questo capitolo si presenteranno le elaborazioni effettuate sui microdati dell'indagine campionaria che la Banca d'Italia svolge con cadenza biennale sui bilanci delle famiglie italiane. I dati sono disponibili in due tipologie di archivi:

- gli archivi annuali che contengono i dati dal 1989 al 2010 in versione pressoché integrale (incluse le sezioni monografiche delle singole indagini).
- gli archivi storici invece, riportano le informazioni riferite al periodo 1977 – 2010 in formato omogeneo, per il sottoinsieme delle variabili ritenute utili per le analisi longitudinali (per esempio la variabile reddito familiare disponibile netto). A partire dall'anno 2002 gli importi nei file dei dati sono in euro, quelli riferiti alle indagini precedenti sono invece in migliaia di lire.

Occorre sottolineare che solo a partire dall'indagine relativa al 1987, la variabile reddito familiare disponibile netto include i redditi da attività finanziarie. Per tale ragione, si è proceduto ad analizzare separatamente le due serie storiche che vanno rispettivamente dal 1977 al 2010 e dall'anno 1987 al 2010 per un totale di 33 distribuzioni reali. In particolare, la serie storica 1977 – 2010 comprende ventuno distribuzioni reali¹, mentre la serie 1987–2010 ne include dodici. E' altresì comprensibile, comprendere come, viste le finalità dell'analisi temporale, la scelta dei dati sia riferita all'archivio storico piuttosto che agli archivi annuali. Infatti, l'archivio storico si caratterizza per le seguenti considerazioni:

¹Le indagini campionarie sono condotte con cadenza annuale nel periodo 1977-1987, a parte l'anno 1985 ed ogni due anni nel periodo 1989-2010 con la sola eccezione del 1997 slittata al 1998.

1. poiché il questionario ha subito, nel corso del tempo, numerose modifiche, è stato necessario intervenire per ottenere informazioni omogenee, in continuità per l'arco temporale considerato, per le variabili di maggior interesse. Informazioni più disaggregate vengono invece fornite, quando disponibili, all'interno di sottoperiodi omogenei di rilevazione;
2. non sono state incluse negli archivi storici le variabili rilevate nelle sezioni monografiche e quelle rilevate in una sola indagine o anche in un numero limitato di indagini. Non sono state inoltre incluse quelle variabili per le quali si sono registrati cambiamenti nell'impostazione della domanda presente nel questionario tali da rendere impossibili i confronti temporali;
3. gli archivi storici contengono inoltre dei pesi di campionamento leggermente differenti rispetto a quelli calcolati di volta in volta in ciascuna indagine.

3.1 Descrizione dei dati

La variabile oggetto di studio è il reddito familiare disponibile al netto delle imposte sul reddito e dei contributi sociali ovvero il reddito netto percepito dalle singole famiglie nell'anno di riferimento di ciascuna indagine. Dunque si considereranno le distribuzioni dei redditi delle famiglie italiane in riferimento alle due serie storiche sopra richiamate. Lo studio dell'evoluzione temporale dell'aggregato reddito disponibile netto e quindi delle misure di ineguaglianza è stato condotto non solo in relazione ai redditi disponibili netti familiari (RF), ma anche tenendo conto dei pesi campionari legati alla probabilità di inclusione nel campione. A partire da tali pesi si è definito il reddito familiare disponibile netto pesato o in breve RFP. Inoltre si è tenuto conto anche di un ulteriore aspetto: i redditi familiari equivalenti o in breve RFE. Occorre precisare le caratteristiche dei RFP e dei RFE.

Redditi familiari pesati - RFP

Come suggerito dalla Banca d'Italia, per le elaborazioni dei dati sono stati utilizzati i pesi campionari la cui complessa fase di determinazione si veda il capitolo 1. Tuttavia, è importante sottolineare che il piano di campionamento prevede frazioni sondate non costanti e l'uso dei coefficienti di ponderazione è necessario per ottenere

stime non distorte per esempio della variabile aggregata reddito familiare. I coefficienti tengono inoltre conto del processo di risposta limitandone i possibili effetti distorsivi sulle stime delle variabili. Nei vari anni di indagine, le procedure di campionamento (liste dalle quali sono state estratte le famiglie, modalità di calcolo dei pesi campionari, ecc.) hanno subito diverse modifiche che rendono non pienamente omogenei i coefficienti riportati nella variabile PESOFIT (o PESOFIB per il 1987) rilevabile dagli archivi forniti dalla Banca d'Italia. Dal 1987 però, la strategia di campionamento si è sostanzialmente stabilizzata. Per limitare la variabilità dovuta ai diversi trattamenti subiti dai pesi nel corso degli anni, sono stati calcolati - mediante tecniche di *raking* - dei nuovi coefficienti di riproporzionamento (PESOFI) che soddisfano nel tempo ulteriori vincoli rispetto a quelli posti a PESOFIT, in particolare legando il peso campionario alle distribuzioni derivanti dall'indagine sulle forze di lavoro. Pertanto i nuovi coefficienti, suggeriti per le analisi utilizzando i dati delle indagini più lontane nel tempo, consentono l'allineamento alle principali distribuzioni marginali socio-demografiche di fonte Istat e alle distribuzioni derivanti dall'indagine sulle forze di lavoro.

Redditi familiari equivalenti - RFE

Nella definizione di reddito familiare disponibile netto (RF) si è implicitamente assunto che il tenore di vita di una persona dipenda da quello della famiglia nella quale si è inseriti e che all'interno del nucleo familiare, tutti i suoi componenti godano dello stesso livello di benessere familiare. Se la famiglia è l'unità economica fondamentale per definire il livello di benessere, nell'analisi occorre tener conto delle economie di scala familiari, in virtù delle quali le necessità di reddito non aumentano, all'interno della famiglia, nella stessa proporzione del numero di componenti. Pertanto, al fine di rendere comparabili i redditi familiari disponibili netti, e tener conto del fatto che la composizione e l'ampiezza della famiglia cambia nel corso del tempo, è necessario ottenere una misura che approssimi il livello di benessere economico familiare. D'altra parte, come precisato sopra, all'aumentare dell'ampiezza del nucleo familiare si realizzano economie di scala di cui bisogna tener conto. Appare chiaro, dunque, perché si preferisce correggere il reddito complessivamente percepito dalla famiglia con una *scala di equivalenza*, ossia il reddito familiare disponibile netto viene reso equivalente attraverso la sua deflazione per una *scala di equivalenza*, variabile al variare del numero dei componenti. La Banca d'Italia utilizza la *scala*

di equivalenza dell'OCSE modificata², che prevede un coefficiente pari ad 1 per il capofamiglia, 0,5 per i componenti con 14 anni e più e 0,3 per i soggetti con meno di 14 anni. Per ciascuna famiglia viene calcolato il numero di adulti equivalenti sommando i coefficienti relativi a ciascun componente. Il reddito familiare viene poi diviso per tale coefficiente e attribuito a ciascun individuo. Il reddito equivalente così ottenuto si interpreta come il reddito di cui ciascun individuo dovrebbe disporre se visse da solo, per raggiungere lo stesso tenore di vita che ha nella famiglia in cui vive. In termini formali, il coefficiente C che rende equivalenti i redditi familiari è ottenuto mediante la seguente espressione:

$$C = 1 + 0,5(CF_{14+} - 1) + 0,3CF_{14-},$$

dove CF_{14+} e CF_{14-} indicano rispettivamente il numero di componenti familiari di età maggiore o uguale a 14, ed il numero di componenti di età minore di 14. La tabella seguente riporta una esemplificazione di detti coefficienti per alcune tipologie familiari.

<i>Tipologia familiare</i>	<i>Scala OCSE modificata</i>
<i>Monocomponente</i>	1
<i>Coppia</i>	1,50
<i>Monogenitore + 1 CF₁₄₋</i>	1,30
<i>Monogenitore + 1 CF₁₄₊</i>	1,50
<i>Coppia + 1 CF₁₄₋</i>	1,80
<i>Coppia + 1 CF₁₄₊</i>	2,00
<i>Coppia + 2 CF₁₄₋</i>	2,10
<i>Coppia + 2 CF₁₄₋ + 1 CF₁₄₊</i>	2,30

Così, per esempio, per una famiglia composta da entrambi i genitori e con 2 figli con età inferiore a 14 anni, il cui reddito disponibile netto ammonta ad euro 47.890, il coefficiente C è dato da:

$$C = 1 + 0,5(2 - 1) + 0,3 \cdot 2 = 2,10.$$

²Si segnala che esistono svariate scale di equivalenza: per esempio la scala Carbonaro, la Oxford scale, la Square Root scale, infine la scala Ise, una misura del benessere familiare introdotta nella nostra legislazione nel 1998 e largamente applicata per selezionare i beneficiari della spesa di welfare soprattutto dagli enti locali.

Il reddito equivalente da attribuire a ciascun componente della famiglia è dunque pari a:

$$\frac{47.890}{2,10} = 22804,8,$$

ed il reddito equivalente familiare complessivo che si ottiene ammonta ad euro $22.804,8 \cdot 4 = 91219,05$.

3.2 Risultati delle elaborazioni

Al fine di illustrare l'evoluzione temporale dell'ineguaglianza dei redditi familiari nel periodo 1977–2010 e nel periodo 1987–2010, sono stati calcolati, in riferimento a ciascuna indagine, le misure sintetiche di ineguaglianza: l'indice G di Gini³, e l'indice sintetico I di Zenga calcolato mediante l'equazione (2.10) raggruppando i dati in una distribuzione di frequenze. Inoltre, per ciascuna indagine, si è valutato il valore delle misure di posizione mediana e media aritmetica e del coefficiente di variazione. Le elaborazioni descritte sono state ottenute, per ciascuna indagine, in relazione ai RF, RFP e ai RFE descritti nel paragrafo precedente. Il fine è quello di valutare altresì l'effetto dell'impiego dei pesi campionari e dei redditi equivalenti sulla evoluzione temporale dell'ineguaglianza. Preme sottolineare che, pur rivestendo notevole interesse, le analisi empiriche non hanno interessato gli aspetti che si è soliti analizzare nello studio delle serie storiche. Si rimanda a possibili futuri sviluppi l'approfondimento degli aspetti inferenziali relativi alle serie storiche prese in esame.

Anno	I			G			Mediana			Media			Mediana/Media			CV		
	RF	RFP	RFE	RF	RFP	RFE	RF	RFP	RFE	RF	RFP	RFE	RF	RFP	RFE	RF	RFP	RFE
1987	0.7099	0.6961	0.6868	0.3692	0.3548	0.3472	12400	11362	6468	15695	13987	7866	0.790	0.812	0.822	0.777	0.833	0.754
1989	0.6670	0.6663	0.6311	0.3310	0.3293	0.3034	14460	14601	7582	17214	17321	8780	0.840	0.843	0.864	0.684	0.692	0.726
1991	0.6601	0.6613	0.6300	0.3234	0.3229	0.2988	16197	16385	8513	19117	19102	9722	0.847	0.858	0.876	0.659	0.684	0.703
1993	0.7103	0.7113	0.6853	0.3635	0.3641	0.3394	17019	16693	9236	20891	20465	10814	0.815	0.816	0.854	0.758	0.748	0.740
1995	0.7067	0.7094	0.6837	0.3626	0.3652	0.3402	18507	18076	10057	22615	22082	11776	0.818	0.819	0.854	0.801	0.774	0.749
1998	0.7102	0.7213	0.6873	0.3613	0.3731	0.3390	21920	20279	11748	26103	24835	13618	0.840	0.817	0.863	0.815	0.802	0.819
2000	0.7093	0.6990	0.6834	0.3612	0.3521	0.3352	22444	21588	12806	27329	26273	14780	0.821	0.822	0.866	0.799	0.789	0.764
2002	0.7032	0.7032	0.6667	0.3575	0.3573	0.3226	23146	22936	13763	28011	27644	15743	0.826	0.830	0.874	0.779	0.763	0.712
2004	0.6943	0.6927	0.6662	0.3555	0.3535	0.3272	24315	24000	14700	29968	29607	17082	0.811	0.811	0.861	0.902	0.869	0.876
2006	0.6859	0.6892	0.6532	0.3449	0.3481	0.3138	26241	26080	16139	31918	31816	18487	0.822	0.820	0.873	0.850	0.896	0.806
2008	0.6811	0.6913	0.6566	0.3410	0.3511	0.3158	26837	26295	16648	32515	32333	18893	0.825	0.813	0.881	0.752	0.783	0.708
2010	0.6912	0.6948	0.6741	0.3474	0.3508	0.3268	27690	27183	16933	33272	32914	19283	0.832	0.826	0.878	0.740	0.732	0.706

Tabella 3.1: Indici di ineguaglianza I di Zenga e G di Gini, mediana, media aritmetica, coefficiente di variazione calcolati in riferimento ai RF, RFP, RFE.

³Si rimanda alla bibliografia per approfondimenti.

Le tabelle 3.1 per la serie 1987 – 2010 e 1 per la serie 1977 – 2010 riportata in appendice, riportano, in riferimento ai redditi familiari disponibili netti (RF), pesati (RFP) ed equivalenti (RFE) l'evoluzione temporale degli indici di ineguaglianza I di Zenga e G di Gini, nonchè il calcolo delle misure di posizione mediana e media aritmetica. Nelle ultime due colonne, invece, il rapporto mediana / media aritmetica ed il coefficiente di variazione (CV) danno preziose informazioni circa il comportamento temporale della loro proporzione che ruota attorno a valori ben definiti.

Il significato degli indici è chiaro: per esempio, considerando i RF per l'anno 2010, i valori $I = 0,6912$ e $G = 0,3474$ informano rispettivamente, che in media, la media superiore è pari al 30,88% della media del gruppo inferiore e che la concentrazione è pari al 34,74% del massimo valore possibile.

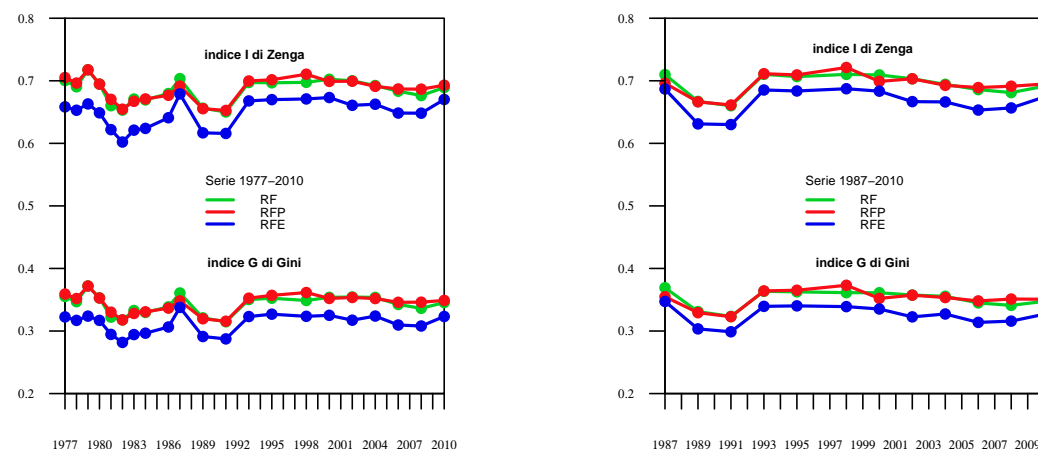


Figura 3.1: Indici I e G per le serie storiche 1977-2010 e 1987-2010 dei redditi familiari.

In un'ottica temporale, l'analisi della dinamica dell'ineguaglianza, risulta più agevole se si guarda la figura 3.1, dalla quale, in riferimento alla serie 1977 – 2010, emerge un andamento decrescente fino al 1982, crescente dal 1983 al 1987 e infine, dopo una fase di decremento seguito da un brusco aumento dell'ineguaglianza tra il 1991 ed il 1993, una fase di sostanziale stabilità con lieve tendenza alla diminuzione della concentrazione fino all'anno 2008, in corrispondenza del quale si registra una

lieve ripresa dell'ineguaglianza. Restringendo l'attenzione alla serie 1987 – 2010, si osserva che l'andamento temporale delle misure di ineguaglianza è il medesimo, in riferimento allo stesso arco temporale, a quello della serie 1977 – 2010.

Se invece, si prendono in considerazione i redditi pesati, si vede come l'incidenza di tali pesi campionari influenza minimamente i valori degli indici di ineguaglianza I e G . In particolare, si nota come, l'andamento temporale di colore rosso (RFP) si sovrappone con quello dei RF di colore verde con poche eccezioni nel 1987, 1998 e nel 2008.

La curva di colore blu si riferisce invece, all'evoluzione temporale della ineguaglianza calcolata sui RFE, la cui determinazione riveste una notevole importanza nello studio della concentrazione dei redditi e della povertà. L'andamento delle misure sintetiche I e G calcolate sui RFE, se da un lato si colloca al di sotto degli andamenti riferiti all'ineguaglianza dei RF e dei RFP, evidenziando dunque la minore concentrazione dei redditi equivalenti, dall'altro, preserva lo stesso comportamento temporale dei redditi familiari pesati e non pesati.

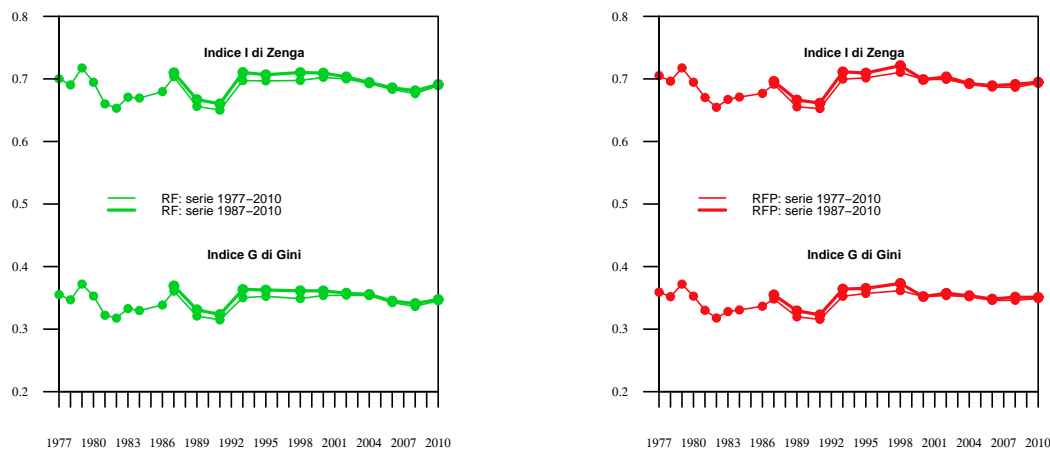


Figura 3.2: Indici I e G per le serie storiche 1977-2010 e 1987-2010 dei RF e dei RFP.

Un ulteriore aspetto che si vuole evidenziare riguarda la distribuzione fortemente

concentrata dei redditi derivanti dalle attività finanziarie.

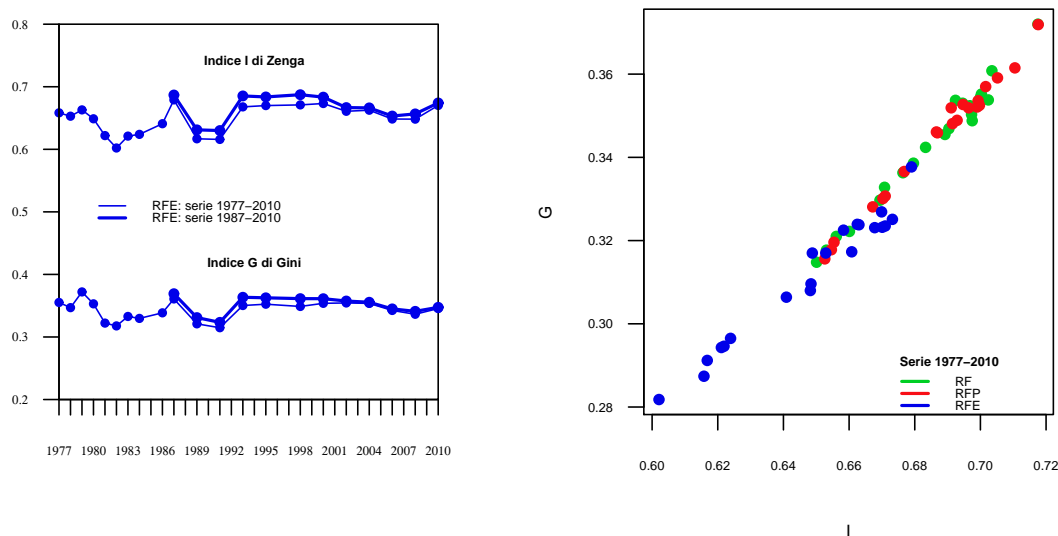


Figura 3.3: Indici I e G per le serie storiche 1977-2010 e 1987-2010 dei RFE. Grafico valori ordinati di I con i corrispondenti valori di G .

Ciò emerge con chiarezza dai grafici 3.2, 3.3, i quali mostrano come le serie storiche degli indici di ineguaglianza I e G in riferimento ai RF, RFP e ai RFE, e in corrispondenza degli anni dal 1987 al 2010, si collocano più in alto rispetto allo stesso periodo della serie 1977–2010 per la quale la definizione di reddito disponibile netto non include la quota derivante dalle attività finanziarie.

I grafici analizzati hanno altresì evidenziato il fatto che, gli indici I di Zenga e G di Gini si muovono pressoché nello stesso senso, ovvero, ai valori piccoli di I si associano valori piccoli di G o equivalentemente ai valori grandi dell'uno si associano valori grandi dell'altro: si parla in tal caso di cograduazione. Si veda, a tal proposito, il grafico riportato a destra nella figura 3.3, dove sull'asse delle ascisse vengono riportati i valori dell'indice I ordinanti in senso non decrescente ed in ordinata i corrispondenti valori dell'indice G .

3.3 Studio di alcuni punti caratteristici della curva $I_{(p)}$

Le analisi empiriche che seguono vogliono evidenziare eventuali cambiamenti nella forma o spostamenti della curva $I_{(p)}$ in relazione alle serie storiche prese in esame.

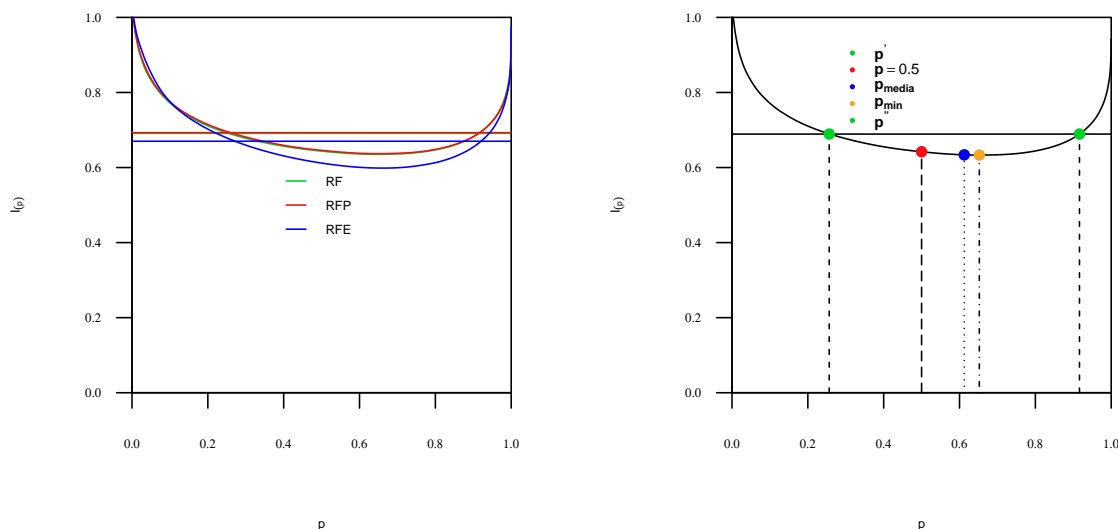


Figura 3.4: Curva $I_{(p)}$ per tipologia di reddito e valori di I in corrispondenza della mediana, media e minimo.

A titolo esemplificativo, si consideri la figura 3.4 nella quale emerge l'andamento ad U della curva $I_{(p)}$ e si evidenziano in verde i RF, in rosso i RFP ed in blu i RFE. Si riporta inoltre, il segmento orizzontale in corrispondenza dell'indice sintetico I . Se i RFE presentano minore concentrazione, si nota una sostanziale sovrapposizione delle curve $I_{(p)}$ per i redditi familiari e per quelli pesati. Il grafico posizionato alla destra evidenzia invece, i punti di coordinate $(p', I_{(p')})$, $(p'', I_{(p'')})$ le cui ascisse p' e p'' rappresentano le frequenze cumulate relative in corrispondenza delle intersezioni della curva $I_{(p)}$ con la retta parallela all'asse delle ascisse passante per il punto di ordinata I . Si noti che $I_{(p')} = I_{(p'')} = I$. I valori a sinistra di p' e a destra di p'' sono le proporzioni di unità statistiche (le famiglie nel nostro caso) caratterizzate da

un livello di ineguaglianza superiore alla media. Al contrario, la differenza $p'' - p'$ rappresenta la quota di famiglie il cui livello di ineguaglianza è inferiore a quello medio. Inoltre, si sono calcolati i valori dell'indice I in corrispondenza di $p = 0.5$ ossia della mediana, di p_{media} ossia frequenza relativa cumulata in corrispondenza della media aritmetica, di p_{min} ossia frequenza cumulata relativa in corrispondenza del minimo valore assunto da I .

La tabella⁴ seguente riferita alla serie storica 1987 – 2010 riporta per ciascuna indagine i valori dei punti sopra delineati distinguendo le tre diverse definizioni di reddito familiare.

Anno	I			$p':p''$			$I_{p=0.5}$			$p_{media}:I_{p_{media}}$			$p_{min}:I_{p_{min}}$		
	RF	RFP	RFE	RF	RFP	RFE	RF	RFP	RFE	RF	RFP	RFE	RF	RFP	RFE
1987	0.7099	0.6961	0.6868	0.2404; 0.9056	0.2624; 0.9188	0.2356; 0.8963	0.6676	0.6523	0.6383	0.6283; 0.6607	0.6156; 0.6454	0.6260; 0.6338	0.6483; 0.6606	0.6716; 0.6443	0.6184; 0.6338
1989	0.6670	0.6663	0.6311	0.2485; 0.9083	0.2580; 0.9131	0.2198; 0.8841	0.6253	0.6235	0.5869	0.6104; 0.6190	0.6084; 0.6167	0.6055; 0.5823	0.6550; 0.6186	0.6523; 0.6159	0.6150; 0.5822
1991	0.6601	0.6613	0.6300	0.2636; 0.9188	0.2844; 0.9311	0.2426; 0.9049	0.6184	0.6209	0.5838	0.6061; 0.6118	0.5963; 0.6120	0.5955; 0.5780	0.6792; 0.6101	0.7074; 0.6076	0.6460; 0.5771
1993	0.7103	0.7113	0.6853	0.2791; 0.9314	0.2862; 0.9367	0.2599; 0.9177	0.6655	0.668	0.6320	0.6123; 0.6560	0.6095; 0.6581	0.6065; 0.6230	0.7015; 0.6533	0.7103; 0.6540	0.6494; 0.6220
1995	0.7067	0.7094	0.6837	0.2713; 0.9207	0.2834; 0.9250	0.2585; 0.9102	0.6598	0.6644	0.6288	0.6168; 0.6509	0.6142; 0.6546	0.6091; 0.6204	0.6658; 0.6409	0.6774; 0.6531	0.6368; 0.6200
1998	0.7102	0.7213	0.6873	0.2753; 0.9258	0.2783; 0.9242	0.2547; 0.9108	0.6574	0.6726	0.6246	0.6119; 0.6465	0.6131; 0.6616	0.6068; 0.6158	0.6676; 0.6450	0.6792; 0.6596	0.6397; 0.6153
2000	0.7093	0.6990	0.6834	0.2718; 0.9241	0.2760; 0.9291	0.2620; 0.9152	0.6599	0.6512	0.6242	0.6132; 0.6506	0.6082; 0.6418	0.6048; 0.6144	0.6847; 0.6487	0.6803; 0.6397	0.6422; 0.6136
2002	0.7032	0.7032	0.6667	0.2650; 0.9209	0.2636; 0.9214	0.2487; 0.9078	0.6566	0.6575	0.6078	0.6159; 0.6472	0.6146; 0.6473	0.6075; 0.5998	0.6652; 0.6462	0.6694; 0.6458	0.6211; 0.5997
2004	0.6943	0.6927	0.6662	0.2339; 0.8945	0.2303; 0.8964	0.2392; 0.8866	0.6492	0.6475	0.6082	0.6257; 0.6442	0.6249; 0.6432	0.6170; 0.6031	0.6267; 0.6442	0.6318; 0.6432	0.6012; 0.6030
2006	0.6859	0.6892	0.6532	0.2388; 0.9019	0.2397; 0.8987	0.2462; 0.8962	0.6386	0.6414	0.5948	0.6176; 0.6323	0.6229; 0.6354	0.6058; 0.5887	0.6416; 0.6322	0.6244; 0.6354	0.6188; 0.5886
2008	0.6811	0.6913	0.6566	0.2410; 0.9042	0.2464; 0.9034	0.2554; 0.9063	0.6342	0.6459	0.6000	0.6216; 0.6289	0.6295; 0.6415	0.5981; 0.5921	0.6208; 0.6289	0.6099; 0.6414	0.6290; 0.5915
2010	0.6912	0.6948	0.6741	0.2538; 0.9143	0.2536; 0.9141	0.2701; 0.9189	0.6436	0.6470	0.6156	0.6137; 0.6356	0.6172; 0.6389	0.5914; 0.6053	0.6445; 0.6351	0.6434; 0.6386	0.6634; 0.6028

Tabella 3.2: Frequenze cumulate relative p' e p'' in corrispondenza delle intersezioni della curva $I_{(p)}$ con la retta parallela all'asse delle ascisse passante per il punto di ordinata I , valori dell'indice I in corrispondenza di $p = 0.5$, p_{media} , p_{min} .

L'analisi congiunta dei punti sopra delineati può dare informazioni circa la forma della curva $I_{(p)}$.

La figura 3.5 mostra l'andamento dal 1977 al 2010 per tipologia di reddito, dei valori p' , p'' , p_{min} . Le cumulate relative p' e p'' seguono un andamento crescente e poi decrescente a partire dal 1987 fino al 2004, in corrispondenza del quale si registra poi, una fase di aumento. Le dinamiche appena descritte si osservano anche per p_{min} . Al contrario, i valori $p'' - p'$ mostrano una sostanziale stabilità nel tempo ed una quasi sovrapposizione degli andamenti temporali delle tre diverse definizioni di reddito familiare. Anche la proporzione cumulata in corrispondenza della media aritmetica mostra sostanziale stabilità negli anni. Si veda, a tal proposito la figura 3.6. Nella stessa figura, si riportano le curve $I_{(p)}$ per gli anni 2008 in verde e 2010 in rosso e

⁴In appendice la tabella 2 con le analoghe elaborazioni sulla serie 1977 – 2010.

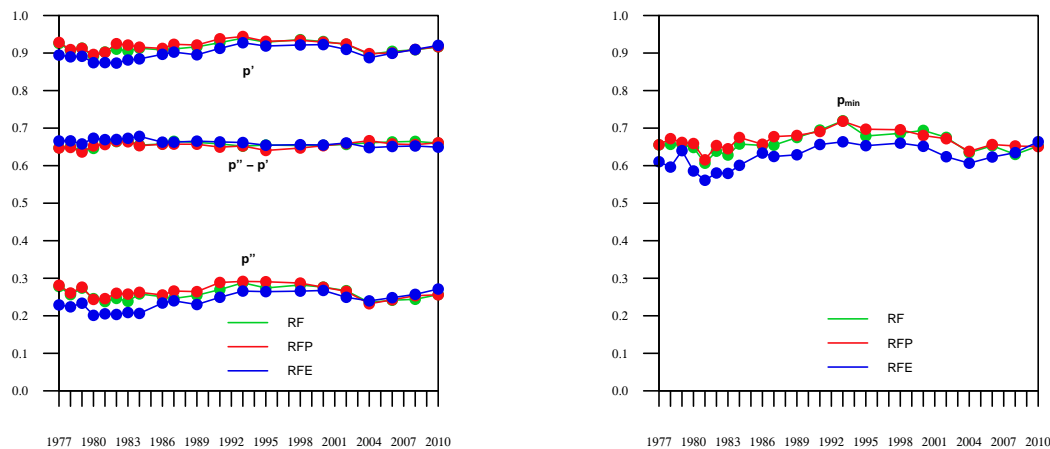


Figura 3.5: Andamento delle frequenze cumulate relative p' , p'' , p_{min} .

i punti in corrispondenza delle ascisse p' , p'' , p_{min} . Si nota come la curva riferita al 2010 si posizioni sopra la curva $I_{(p)}$ del 2008 fino a p_{min} per poi sovrapporsi. Se da una lato si evidenzia la maggiore concentrazione del 2010 dall'altro, i punti della curva $I_{(p)}$ dell'anno 2010, si collocano più a destra di quelli del 2008, a conferma dunque di quanto visto nel grafico 3.5.

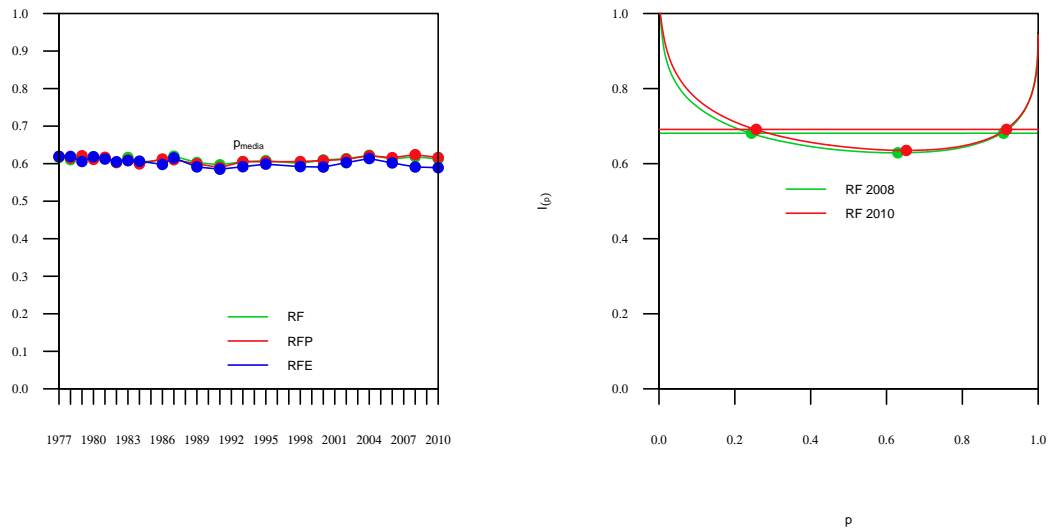


Figura 3.6: Andamento di p_{media} e curve $I(p)$ per gli anni 2008 e 2010.

3.4 Redditi familiari equivalenti e nozione di povertà relativa

Lo studio empirico della curva $I(p)$ in relazione ai redditi familiari equivalenti disponibili netti (RFE), ha messo in luce alcuni aspetti che meritano maggiori approfondimenti. Si fa riferimento al concetto di povertà e di soglia di povertà. E' opportuno prima di tutto chiarire il concetto di povertà e le sue possibili misure. In letteratura, non vi è un modo univoco di definire, e quindi quantificare, il fenomeno della povertà. Occorre, quindi, preliminarmente precisare un criterio di povertà, sulla cui base sia possibile caratterizzare e quindi identificare un soggetto (o famiglia) come povero. La fase di identificazione dei soggetti poveri prevede:

1. la specificazione di un concetto di povertà (per esempio assoluta o relativa);
2. la scelta di un indicatore su cui basare le misure di povertà (per esempio reddito o consumo);
3. l'individuazione di una unità di analisi (famiglia o individuo);

4. la definizione di una soglia di povertà.

In riferimento al concetto di povertà, si identifica con povertà assoluta⁵ una condizione di deprivazione monetaria tale da impedire il soddisfacimento dei propri bisogni essenziali, rilevata dalla incapacità di acquistare un paniere minimo di beni e servizi necessario per la sussistenza. In altre parole, la nozione di povertà assoluta si fonda sull'idea che sia possibile individuare un paniere di beni e servizi essenziali (generi alimentari, abitazione e beni durevoli di prima necessità) che assicuri il soddisfacimento di bisogni minimi: i poveri sono coloro il cui potere d'acquisto è inferiore a quello richiesto dal paniere, opportunamente espresso in termini monetari. Dunque il valore del paniere identifica la linea di povertà assoluta. Caratteristica distintiva della linea assoluta è quella di rimanere ferma nel tempo, a meno di un adeguamento puramente nominale, per tenere conto dell'inflazione. Misurare la povertà in termini assoluti ha il vantaggio di cogliere più correttamente i fenomeni di disagio estremo e di neutralizzare gli effetti del ciclo economico - le fluttuazioni di breve periodo del reddito. Essendo in larga parte dipendente da stime del fabbisogno nutrizionale della popolazione - la componente alimentare spiega tipicamente più della metà del valore monetario del paniere - la soglia di povertà assoluta possiede inoltre un carattere di oggettività che la rende metodologicamente attraente.

La povertà relativa invece, è intesa come una condizione di deficit di risorse monetarie necessarie per mantenere lo standard di vita corrente, definito in funzione del livello medio di risorse nella popolazione di riferimento. In altri termini, sono poveri (relativamente) i soggetti che non raggiungono una certa soglia di risorse fissata in funzione del livello medio delle risorse dei soggetti che compongono l'universo di riferimento. Valutare la povertà relativa significa misurare le risorse economiche di ognuno rispetto a quelle possedute da tutti gli altri. Corollario di questa impostazione è la fissazione della soglia di povertà in funzione di un indice di posizione - la media o la mediana - della distribuzione utilizzata per rappresentare il benessere di una società - tipicamente la distribuzione dei consumi o dei redditi familiari. La soglia di povertà relativa tiene anche conto, per come è costruita, della crescita reale dell'economia: il riferimento alla media o alla mediana registra infatti, di anno in anno, le variazioni intervenute nel tenore di vita della collettività nel suo complesso. Per quanto già precisato nelle pagine precedenti, al fine di misurare la povertà (rel-

⁵La misura di povertà assoluta è adottata per esempio dagli Stati Uniti, Canada e dalla Banca Mondiale e si basa su una soglia non direttamente legata alla distribuzione dei redditi familiari.

ativa) è necessario, definire una scala di equivalenza per consentire un confronto tra famiglie non omogenee tra loro quanto a dimensione e composizione. La proporzione della mediana della distribuzione dei redditi familiari equivalenti che si è soliti considerare come soglia di povertà (relativa) varia in un intervallo che va dal 50% al 70% del reddito equivalente mediano. Tuttavia, se il concetto di povertà relativa è la misura di povertà utilizzata come standard di riferimento dall'Istat⁶ e dall'Eurostat, le scelte dei due Istituti si differenziano tra loro in relazione all'indicatore su cui basare le misure di povertà, all'unità di analisi e per la definizione di soglia di povertà. Per l'Istat l'indicatore su cui basare le misure di povertà è la spesa per consumi e l'unità di analisi è la famiglia. La soglia di povertà invece è pari alla spesa media pro-capite per consumi. Infine, per rendere equivalenti la spesa per consumi di famiglie di ampiezza diversa, l'Istituto di statistica italiano utilizza la scala di Carbonaro, che tiene conto solo del numero di componenti. Si definisce povera secondo l'Istat una famiglia di due componenti che abbia una spesa per consumi inferiore o uguale alla soglia di povertà.

A differenza dell'Istat, l'Eurostat adotta il reddito quale indicatore su cui basare le misure di povertà, l'individuo quale unità di analisi ed il 60% del valore mediano dei redditi familiari equivalenti come soglia di povertà. Per rendere equivalenti i redditi di famiglie diverse utilizza la scala dell'OCSE modificata, che tiene conto non solo del numero ma anche dell'età dei componenti. Si definisce povero un individuo appartenente a una famiglia che disponga di un reddito familiare equivalente inferiore o uguale alla soglia di povertà. La Banca d'Italia fissa al 50% del reddito equivalente mediano la soglia di povertà relativa e definisce povera la famiglia il cui reddito equivalente è inferiore o uguale a detta soglia.

Le analisi empiriche che hanno interessato i RFE condotte sulle due serie storiche prese in esame sono racchiuse nelle tabelle 3.4 per la serie 1987 – 2010 e 3 per la serie storica 1977 – 2010 riportata in appendice. Per l'anno 2010 per esempio, nella tabella 3.4 la soglia di povertà (relativa) definita come il 50% ed il 60% del valore di ξ che indica la mediana della distribuzione dei redditi familiari equivalenti è pari, rispettivamente a 8466 e 10159 euro. A tali valori corrisponde una frequenza relativa cumulata, indicata con p''' , pari rispettivamente al 14,52% ed al 21,12%. Si è inoltre indicato con $I_{(p''')}$ il valore assunto dall'indice di inequaglianza I di Zenga

⁶Le stime ufficiali degli indicatori di povertà in Italia sono demandate all'Istat dal 1999.

Anno	I	$p'; p''$	soglia di povertà		$p'''; I_{(p''')}$		$\% \cdot \xi$
	RFE	RFE	50%· ξ	60%· ξ	50%· ξ	60%· ξ	$p^* = p'$
1987	0.6868	0.2356; 0.8963	3236	3884	0.1318; 0.7319	0.2034; 0.6980	0.65
1989	0.6311	0.2198; 0.8841	3791	4549	0.0975; 0.6853	0.1752; 0.6457	0.66
1991	0.6300	0.2426; 0.9049	4256	5107	0.1065; 0.6954	0.1761; 0.6548	0.67
1993	0.6853	0.2599; 0.9177	4618	5541	0.1433; 0.7443	0.2093; 0.7061	0.67
1995	0.6837	0.2585; 0.9102	5030	6036	0.1436; 0.7428	0.2062; 0.7065	0.67
1998	0.6873	0.2547; 0.9108	5876	7051	0.1388; 0.7573	0.2029; 0.7126	0.67
2000	0.6834	0.2620; 0.9152	6403	7684	0.1418; 0.7491	0.2086; 0.7070	0.67
2002	0.6667	0.2487; 0.9078	6881	8257	0.1292; 0.7338	0.1959; 0.6906	0.67
2004	0.6662	0.2392; 0.8866	7351	8822	0.1304; 0.7193	0.1949; 0.6846	0.66
2006	0.6532	0.2462; 0.8962	8069	9683	0.1265; 0.7142	0.1900; 0.6776	0.68
2008	0.6566	0.2554; 0.9063	8325	9990	0.1271; 0.7209	0.2014; 0.6775	0.67
2010	0.6741	0.2701; 0.9189	8466	10159	0.1452; 0.7393	0.2111; 0.7000	0.68

Tabella 3.3: Soglie di povertà, p''' e $I_{(p''')}$ in corrispondenza del 50% e del 60% di ξ , frazione di ξ in corrispondenza di p' . **Dati: indagini 1987-2010. Redditi familiari disponibili netti inclusi redditi da capitale finanziario resi equivalenti mediante la scala OCSE modificata**

in corrispondenza di p''' . Per avere un'idea dell'incidenza del fenomeno della povertà (relativa) nel tempo, occorre analizzare l'andamento di $I_{(p''')}$: si nota una crescita di p''' nel periodo 2006 – 2010 passando dal 12,5% al 14,5% se si considera quale soglia di povertà il 50% di ξ , e dal 19% al 21% nel caso in cui si fissa quale soglia di povertà un livello pari al 60% di ξ . Le frequenze p''' del 2010 sono in linea con quelle del 1993, anno in cui si registra un forte aumento del numero di famiglie povere: infatti si passa dal 10,65% o 17,61% del 1991 al 14,3% ed al 20,33% del 1993. Si ricordi che i primi anni novanta furono caratterizzati da una grande crisi finanziaria. L'ultima colonna della tabella indica invece, la frazione di ξ in corrispondenza della quale si osserva una frequenza relativa cumulata p^* pari a p' ovvero, in altri termini, la frazione di ξ in corrispondenza di p' . Dunque, si nota come il rapporto tra $x_{(p')}$ e la mediana assume valori oscillanti attorno a 0.67, dove con $x_{(p')}$ si è indicato il valore del reddito familiare in corrispondenza di p' . In definitiva, per il caso italiano,

il primo punto $(p', I_{(p')})$ di intersezione fra la curva $I_{(p)}$ e la retta parallela all'asse delle ascisse con ordinata pari ad I può essere sfruttato per lo studio della povertà: la regolarità empirica conferma il fatto che p' possa essere identificato come indice di diffusione della povertà.

Analoghe considerazioni valgono per la serie 1977–2010 per la quale la definizione di reddito familiare non comprende i redditi da capitale finanziario.

Capitolo 4

Scomposizione per fonti di reddito dell'indice I di ineguaglianza

4.1 Introduzione

In questo capitolo si presenterà la metodologia relativa alla scomposizione per fonti di reddito degli indici puntuali I_i e sintetico I di Zenga. Si farà riferimento al lavoro di Zenga *et altri* (2012) di recente pubblicazione.

4.2 Definizioni e notazione

Siano X_1, X_2, \dots, X_c le c variabili (fonti di reddito) osservabili su ciascuna delle n unità statistiche (individui, famiglie) di una popolazione finita e sia Y la somma $\sum_{j=1}^c X_j$ (reddito totale degli individui o famiglie). Siano

$$0 \leq y_{(1)} \leq y_{(2)} \leq \dots \leq y_{(i)} \leq \dots \leq y_{(n)} > 0, \quad (4.1)$$

gli n valori della variabile Y ordinati in modo non decrescente. In riferimento alla i -esima unità, la variabile Y assume il valore:

$$y_{(i)} = \sum_{j=1}^c x_{ij} = x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{ij} + \dots + x_{ic}. \quad (4.2)$$

E' necessario, per le analisi successive, in riferimento al totale della popolazione, organizzare i dati in una matrice di dimensione $n \times c$ le cui righe, ordinate secondo la

variabile $y_{(i)}$, ($i = 1, \dots, n$), riportano i valori delle c fonti di reddito in riferimento alle singole unità della popolazione:

$$\begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1j} & \dots & x_{1c} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{i1} & \dots & x_{ij} & \dots & x_{ic} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nj} & \dots & x_{nc} \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Identifichiamo la matrice appena ottenuta come *matrice dei dati* oppure con l'acronimo DM (*Data Matrix*).

Sia ${}_jT = \sum_{i=1}^n x_{ij}$ la somma degli n valori della colonna j –esima di DM e sia,

$$\begin{aligned} T &= \sum_{j=1}^c {}_jT = \sum_{j=1}^c \sum_{i=1}^n x_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^c x_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n y_{(i)}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

il reddito totale della popolazione. Si indichino inoltre, con ${}_j\gamma$, ($j = 1, \dots, c$), i contributi relativi di X_j al totale T . Formalmente si ha:

$${}_j\gamma = \frac{{}_jT}{T}. \quad (4.5)$$

Ovviamente vale:

$$\sum_{j=1}^c {}_j\gamma = \sum_{j=1}^c \frac{{}_jT}{T} = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^c {}_jT = \frac{T}{T} = 1. \quad (4.6)$$

Dalla matrice dei dati (4.3) si osserva che i valori di ciascuna fonte di reddito X_j non sono necessariamente ordinati in senso non decrescente, ossia non è generalmente vero che:

$$x_{1j} \leq x_{2j} \leq \dots \leq x_{nj}, \quad j = 1, \dots, c.$$

Dunque, ordinando in senso non decrescente i valori di ciascuna colonna di DM , si ottiene un'altra importante matrice:

$$\begin{bmatrix} x_{(11)} & \cdots & x_{(1j)} & \cdots & x_{(1c)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{(i1)} & \cdots & x_{(ij)} & \cdots & x_{(ic)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{(n1)} & \cdots & x_{(nj)} & \cdots & x_{(nc)} \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

Nella matrice appena costruita, chiamata *matrice di cograduazione*, ovvero *CM* (*Cograduation Matrix*), si ha:

$$x_{(1j)} \leq x_{(2j)} \leq \dots \leq x_{(nj)}, \quad j = 1, \dots, c.$$

Si evidenzia che mentre ciascuna riga della *DM* si riferisce ad una singola unità statistica, ciò, a causa dell'ordinamento di ciascuna colonna, non è necessariamente vero nel caso della *CM*. Pertanto, la somma dei valori di ciascuna riga della *CM* fornisce i totali di reddito teorici,

$$y_{(i)}^* = \sum_{j=1}^c x_{(ij)} = x_{(i1)} + \dots + x_{(ij)} + \dots + x_{(ic)}, \quad (4.8)$$

in riferimento a ciascuna unità statistica.

Osservando che,

$${}_jT^* = \sum_{i=1}^n x_{(ij)} = \sum_{i=1}^n x_{ij} = {}_jT,$$

ossia la somma degli n valori ordinati della j -esima colonna della (4.7) coincide con la somma degli n valori non ordinati della j -esima colonna della matrice dei dati *DM*, e tenendo conto della (4.4), si ha:

$$T^* = \sum_{j=1}^c {}_jT^* = \sum_{j=1}^c \sum_{i=1}^n x_{(ij)} = \sum_{j=1}^c \sum_{i=1}^n x_{ij} = T. \quad (4.9)$$

Un'altra importante matrice che si ottiene dalla *DM* è la cosiddetta *matrice delle trasformazioni di scala* ovvero *STM* (*Scale Transformation Matrix*), i cui valori \hat{x}_{ij} sono dati da:

$$\hat{x}_{ij} = \frac{{}_jT^*}{T} \cdot y_{(i)} = {}_j\gamma \cdot y_{(i)}, \quad \forall i, j. \quad (4.10)$$

Dunque, la STM assume la seguente forma:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{11} & \dots & \hat{x}_{1j} & \dots & \hat{x}_{1c} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \hat{x}_{i1} & \dots & \hat{x}_{ij} & \dots & \hat{x}_{ic} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \hat{x}_{n1} & \dots & \hat{x}_{nj} & \dots & \hat{x}_{nc} \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

dove,

$$\hat{y}_{(i)} = \sum_{j=1}^c \hat{x}_{ij} = \hat{x}_{i1} + \dots + \hat{x}_{ij} + \dots + \hat{x}_{ic}.$$

Nella STM i valori di \hat{X}_j sono trasformazioni di scala del reddito totale Y e si ha:

$${}_j\hat{T} = \sum_{i=1}^n \hat{x}_{ij} = \sum_{i=1}^n \frac{{}_jT}{T} \cdot y_{(i)} = \frac{{}_jT}{T} \sum_{i=1}^n y_{(i)} = \frac{{}_jT}{T} \cdot T = {}_jT, \quad (j = 1, \dots, c),$$

e,

$$\hat{y}_{(i)} = \sum_{j=1}^c \hat{x}_{ij} = \sum_{j=1}^c \frac{{}_jT}{T} \cdot y_{(i)} = \sum_{j=1}^c {}_j\gamma \cdot y_{(i)} = y_{(i)} \sum_{j=1}^c {}_j\gamma = y_{(i)}, \quad (i = 1, \dots, n).$$

Dopo aver definito le matrici DM , CM e STM , ora si definirà l'indice sintetico di ineguaglianza I di Zenga in riferimento al reddito totale Y .

Sia:

- $Q_i(Y) = \sum_{t=1}^i y_{(t)}$, ($i = 1, \dots, n$), il reddito totale delle i unità più povere della popolazione;
- $Q_n(Y) = T$, l'ammontare del reddito dell'intera popolazione di riferimento;
- $M = \frac{1}{n} \cdot T$, la media aritmetica dell'ammontare totale del reddito.

In corrispondenza di ciascun valore $y_{(i)}$, è possibile dividere la popolazione in due sottogruppi disgiunti, ottenendo:

1. un *gruppo inferiore* che contiene le i unità più povere della popolazione con reddito totale $y_{(1)}, \dots, y_{(i)}$ e *media inferiore* definita come:

$$\bar{M}_i(Y) = \frac{1}{i} \cdot Q_i(Y) = \frac{1}{i} \sum_{t=1}^i y_{(t)},$$

2. e un *gruppo superiore* che contiene le rimanenti unità della popolazione (le più ricche) con reddito totale pari a $y_{(i+1)}, \dots, y_{(n)}$ e con *media superiore* data da:

$$\bar{M}_i^+(Y) = \begin{cases} \frac{T - Q_i(Y)}{n-i} & i = 1, \dots, n-1, \\ y_{(n)}, & i = n. \end{cases}$$

Zenga (2007) ha proposto quale misura di ineguaglianza tra i gruppi inferiori e quelli superiori i seguenti rapporti:

$$I_i = \frac{\bar{M}_i^+(Y) - \bar{M}_i(Y)}{\bar{M}_i^+(Y)}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.12)$$

E' chiaro che gli indici I_i sono misure puntuali di ineguaglianza che forniscono la variazione relativa della media aritmetica inferiore dell' i -esimo gruppo $\bar{M}_i(Y)$ in termini di $\bar{M}_i^+(Y)$. L'indice sintetico di ineguaglianza è dato da:

$$I = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_i. \quad (4.13)$$

Si consideri ora la matrice di cograduazione CM definita dalla (4.7) e siano:

- $X_{(j)}$, ($j = 1, \dots, c$), la variabile che assume gli n valori ordinati $x_{(1j)}, \dots, x_{(nj)}$ della j -esima colonna della CM ;
- $Y^* = \sum_{j=1}^c X_{(j)}$ la variabile reddito totale nel caso di uniforme ordinamento tra le c fonti di reddito.

Osservando che Y^* assume gli n valori ordinati $y_{(1)}^*, \dots, y_{(i)}^*, \dots, y_{(n)}^*$, è possibile, analogamente a quanto visto sopra in riferimento alla variabile Y definire le seguenti quantità:

- $Q_i(Y^*) = \sum_{t=1}^i y_{(t)}^*$, ($i = 1, \dots, n$), il reddito totale teorico delle i unità più povere;
- $Q_n(Y^*) = T^* = T$, l'ammontare del reddito dell'intera popolazione di riferimento.

In corrispondenza di ciascun valore $y_{(i)}^*$, è possibile dividere la popolazione in due sottogruppi disgiunti, ottenendo:

1. un *gruppo inferiore* che contiene le i unità più povere della popolazione con reddito totale teorico $y_{(1)}^*, \dots, y_{(i)}^*$ e *media inferiore* definita come:

$$\bar{M}_i(Y^*) = \frac{1}{i} \cdot Q_i(Y^*) = \frac{1}{i} \sum_{t=1}^i y_{(t)}^*, \quad (4.14)$$

2. e un *gruppo superiore* che contiene le rimanenti unità della popolazione (le più ricche) con reddito totale teorico pari a $y_{(i+1)}^*, \dots, y_{(n)}^*$ e con *media superiore* data da:

$$M_i^+(Y^*) = \begin{cases} \frac{T - Q_i(Y^*)}{n-i}, & i = 1, \dots, n-1, \\ y_{(n)}^*, & i = n. \end{cases} \quad (4.15)$$

Il valore dell'indice puntuale di Zenga per la variabile Y^* è dato da:

$$I_i^* = \frac{M_i^+(Y^*) - \bar{M}_i(Y^*)}{M_i^+(Y^*)}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.16)$$

Dato che $x_{(ij)} \leq x_{ij} \forall i$ e j fissato, si ha:

$$\sum_{j=1}^c x_{(ij)} \leq \sum_{j=1}^c x_{ij}, \quad i = 1, \dots, n,$$

da cui,

$$\sum_{t=1}^i \sum_{j=1}^c x_{(tj)} \leq \sum_{t=1}^i \sum_{j=1}^c x_{tj},$$

ossia, dalle (4.2), (4.8),

$$\sum_{t=1}^i y_{(t)}^* \leq \sum_{t=1}^i y_{(t)}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.17)$$

e quindi,

$$Q_i(Y^*) \leq Q_i(Y), \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.18)$$

Da quest'ultima disequaglianza, tenendo conto della definizione di *media inferiore*, è immediato constatare che:

$$\bar{M}_i(Y^*) \leq \bar{M}_i(Y), \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.19)$$

Dimostriamo adesso che vale:

$$M_i^+(Y^*) \geq M_i^+(Y), \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.20)$$

Dalla definizione (4.15) di *media superiore* di Y^* , tenendo conto della (4.18) e del fatto che $T = T^* = Q_n(Y^*)$, si ha:

$$T - Q_i(Y^*) \geq T - Q_i(Y), \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (4.21)$$

ossia,

$$\frac{T - Q_i(Y^*)}{n-i} \geq \frac{T - Q_i(Y)}{n-i}, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (4.22)$$

e quindi, dalla (4.15), deriva che:

$$\overset{+}{M}_i(Y^*) \geq \overset{+}{M}_i(Y), \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.23)$$

Si perviene allo stesso risultato se si premoltiplica per -1 ciascun membro della (4.18), ottenendo $-Q_i(Y^*) \geq -Q_i(Y)$, ($i = 1, \dots, n$), da cui, sommando ad ambo i membri la quantità positiva T e moltiplicando per $\frac{1}{n-i}$, si giunge al risultato (4.23).

Dalle disuguaglianze (4.19), (4.23) ed osservando che $-\bar{M}_i(Y^*) \geq -\bar{M}_i(Y)$, ($i = 1, \dots, n$), si ha:

$$\overset{+}{M}_i(Y^*) - \bar{M}_i(Y^*) \geq \overset{+}{M}_i(Y) - \bar{M}_i(Y^*) \geq \overset{+}{M}_i(Y) - \bar{M}_i(Y). \quad (4.24)$$

Dalla catena di disuguaglianze (4.24) e tenendo conto della (4.23), si ottiene:

$$I_i^* = \frac{\overset{+}{M}_i(Y^*) - \bar{M}_i(Y^*)}{\overset{+}{M}_i(Y^*)} \geq \frac{\overset{+}{M}_i(Y) - \bar{M}_i(Y)}{\overset{+}{M}_i(Y)} = I_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.25)$$

In definitiva, l'indice sintetico di ineguaglianza per la variabile Y^* è dato da:

$$I^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_i^* \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_i = I, \quad (4.26)$$

con uguaglianza solo nel caso in cui tra le c fonti di reddito vi sia uniforme cograduazione.

In modo del tutto analogo a quanto visto sopra, è possibile definire gli indici puntuali ${}_j I_i$ e sintetico ${}_j I$ per la variabile $X_{(j)}$.

Siano:

- $Q_i(X_{(j)}) = \sum_{t=1}^i x_{(tj)}$, $i = \dots, n$;
- $\bar{M}_i(X_{(j)}) = \frac{1}{i} \cdot Q_i(X_{(j)})$, $i = \dots, n$;
- $M_i^+(X_{(j)}) = \begin{cases} \frac{jT - Q_i(X_{(j)})}{n-i} & i = 1, \dots, n-1, \\ x_{(nj)}, & i = n. \end{cases}$

Pertanto, gli indici puntuali ${}_jI_i$ di ineguaglianza e sintetico ${}_jI$ per la variabile $X_{(j)}$ sono definiti da:

$${}_jI_i = \frac{M_i^+(X_{(j)}) - \bar{M}_i(X_{(j)})}{M_i^+(X_{(j)})}, \quad i = 1, \dots, n., \quad (4.27)$$

e,

$${}_jI = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n {}_jI_i, \quad (4.28)$$

dove $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n {}_jI_i$ è la media aritmetica degli indici puntuali ${}_jI_i$.

4.3 Decomposizione degli indici puntuali I_i e sintetico I di ineguaglianza

4.3.1 Caso matrice dei dati - DM

Recentemente, Zenga M., Radaelli P. e Zenga Ma. (2012) hanno calcolato i contributi assoluti e relativi di ciascuna variabile X_j agli indici di ineguaglianza puntuali I_i e sintetico I . Si considerino a tal proposito, gli n valori x_{1j}, \dots, x_{nj} assunti dalla j -esima fonte di reddito X_j nella matrice (4.3). Siano:

- $Q_i(X_j) = \sum_{t=1}^i x_{tj}$, $i = \dots, n$, la j -esima fonte di reddito cumulata per le i unità più povere;
- $\bar{M}_i(X_j) = \frac{1}{i} \cdot Q_i(X_j)$, $i = \dots, n$, la media di X_j nel gruppo inferiore;
- $M_i^+(X_j) = \begin{cases} \frac{T - Q_i(X_j)}{n-i} & i = 1, \dots, n-1, \\ x_{nj} & i = n, \end{cases}$, la media di X_j nel gruppo superiore;
- $M(X_j) = {}_jM = \frac{1}{n} \cdot {}_jT$, la media aritmetica degli n valori di X_j .

Grazie alla (4.12) e dalle seguenti relazioni,

$$\bar{M}_i(Y) = \sum_{j=1}^c \bar{M}_i(X_j), \quad \overset{+}{M}_i(Y) = \sum_{j=1}^c \overset{+}{M}_i(X_j), \quad (4.29)$$

si ha:

$$\begin{aligned} I_i &= \frac{\overset{+}{M}_i(Y) - \bar{M}_i(Y)}{\overset{+}{M}_i(Y)} = \frac{\sum_{j=1}^c \overset{+}{M}_i(X_j) - \sum_{j=1}^c \bar{M}_i(X_j)}{\overset{+}{M}_i(Y)} \\ &= \sum_{j=1}^c \frac{\overset{+}{M}_i(X_j) - \bar{M}_i(X_j)}{\overset{+}{M}_i(Y)} \\ &= \sum_{j=1}^c B_i(X_j), \end{aligned} \quad (4.30)$$

dove $B_i(X_j) = \frac{\overset{+}{M}_i(X_j) - \bar{M}_i(X_j)}{\overset{+}{M}_i(Y)}$, è il contributo della j -esima fonte di reddito X_j all'indice puntuale di ineguaglianza I_i .

Dalla (4.30), si ottiene:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^c B_i(X_j) \\ &= \sum_{j=1}^c \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n B_i(X_j) \\ &= \sum_{j=1}^c B(X_j), \end{aligned} \quad (4.31)$$

dove $B(X_j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n B_i(X_j)$ è il contributo della fonte X_j all'indice sintetico di ineguaglianza I .

Se $I_i > 0$, è possibile costruire i contributi relativi di X_j ad I_i nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \beta_i(X_j) &= \frac{B_i(X_j)}{I_i} = \frac{\overset{+}{M}_i(X_j) - \bar{M}_i(X_j)}{\overset{+}{M}_i(Y)} \cdot \frac{\overset{+}{M}_i(Y)}{\overset{+}{M}_i(Y) - \bar{M}_i(Y)} \\ &= \frac{\overset{+}{M}_i(X_j) - \bar{M}_i(X_j)}{\overset{+}{M}_i(Y) - \bar{M}_i(Y)}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Ovviamente vale:

$$\sum_{j=1}^c \beta_i(X_j) = 1.$$

Infatti, dalle (4.32), (4.29), si ha:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^c \beta_i(X_j) &= \sum_{j=1}^c \left[\frac{\overset{+}{M}_i(X_j) - \bar{M}_i(X_j)}{\overset{+}{M}_i(Y) - \bar{M}_i(Y)} \right] \\ &= \frac{\sum_{j=1}^c \overset{+}{M}_i(X_j) - \sum_{j=1}^c \bar{M}_i(X_j)}{\overset{+}{M}_i(Y) - \bar{M}_i(Y)} \\ &= \frac{\overset{+}{M}_i(Y) - \bar{M}_i(Y)}{\overset{+}{M}_i(Y) - \bar{M}_i(Y)} = 1. \end{aligned}$$

Appare utile soffermarsi sul significato della (4.32). Si supponga che $\beta_i(X_j) = {}_j\alpha_i$, con ${}_j\alpha_i \in [0, 1]$. Ciò vuol dire che la differenza tra la media superiore $\overset{+}{M}_i(X_j)$ ed inferiore $\bar{M}_i(X_j)$ della j -esima fonte di reddito X_j è pari al $({}_j\alpha_i \cdot 100)\%$ della differenza tra la media superiore $\overset{+}{M}_i(Y)$ ed inferiore $\bar{M}_i(Y)$ del reddito totale Y . Ovvero, in altri termini, $({}_j\alpha_i \cdot 100)\%$ indica il contributo relativo di X_j all'indice puntuale I_i di ineguaglianza.

Dalla (4.31), si ricava facilmente il contributo relativo della variabile X_j all'indice sintetico I :

$$\beta(X_j) = \frac{B(X_j)}{I}, \quad (4.33)$$

e vale,

$$\sum_{j=1}^c \beta(X_j) = 1 \quad (4.34)$$

4.3.2 Caso matrice con i dati trasformati - *STM*

Si osservi che per la matrice delle trasformazioni di scala, vale:

$$\hat{y}_{(i)} = \sum_{j=1}^c \hat{x}_{ij} = y_{(i)}, \quad (i = 1, \dots, n),$$

e quindi,

$$\hat{Y} = \sum_{j=1}^c \hat{X}_j = Y. \quad (4.35)$$

Conseguentemente, I_i , ($i = \dots, n$), è anche l'indice puntuale della variabile \hat{Y} . Pertanto, in modo analogo a quanto già fatto sopra, è possibile scomporre l'indice I_i utilizzando le variabili:

$$\hat{X}_j = {}_j\gamma \cdot Y, \quad (j = \dots, c). \quad (4.36)$$

Grazie alle (4.36), (4.35), (4.6) e alle note proprietà della media aritmetica, si ha:

$$\begin{aligned} \bar{M}_i(\hat{Y}) &= \sum_{j=1}^c \bar{M}_i(\hat{X}_j) = \sum_{j=1}^c \bar{M}_i({}_j\gamma \cdot Y) = \sum_{j=1}^c {}_j\gamma \cdot \bar{M}_i(Y) = \bar{M}_i(Y) \cdot \sum_{j=1}^c {}_j\gamma = \bar{M}_i(Y), \\ \overset{+}{M}_i(\hat{Y}) &= \sum_{j=1}^c \overset{+}{M}_i(\hat{X}_j) = \sum_{j=1}^c \overset{+}{M}_i({}_j\gamma \cdot Y) = \sum_{j=1}^c {}_j\gamma \cdot \overset{+}{M}_i(Y) = \overset{+}{M}_i(Y) \cdot \sum_{j=1}^c {}_j\gamma = \overset{+}{M}_i(Y), \end{aligned}$$

da cui, tenendo conto della (4.12), si ottiene:

$$\begin{aligned} I_i &= \frac{\overset{+}{M}_i(\hat{Y}) - \bar{M}_i(\hat{Y})}{\overset{+}{M}_i(\hat{Y})} = \frac{\overset{+}{M}_i(Y) - \bar{M}_i(Y)}{\overset{+}{M}_i(Y)} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^c \overset{+}{M}_i(\hat{X}_j) - \sum_{j=1}^c \bar{M}_i(\hat{X}_j)}{\sum_{j=1}^c \overset{+}{M}_i(\hat{X}_j)} = \sum_{j=1}^c \frac{\overset{+}{M}_i(\hat{X}_j) - \bar{M}_i(\hat{X}_j)}{\overset{+}{M}_i(Y)} \quad (4.37) \\ &= \sum_{j=1}^c B_i(\hat{X}_j) = \sum_{j=1}^c {}_j\gamma \cdot I_i, \end{aligned}$$

dove $B_i(\hat{X}_j) = \frac{\overset{+}{M}_i(\hat{X}_j) - \bar{M}_i(\hat{X}_j)}{\overset{+}{M}_i(Y)} = {}_j\gamma \cdot I_i$, è il contributo della j -esima fonte di reddito \hat{X}_j all'indice puntuale di ineguaglianza I_i .

Il contributo di \hat{X}_j ad I è dato da:

$$B(\hat{X}_j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n B_i(\hat{X}_j) = {}_j\gamma \cdot I, \quad (4.38)$$

mentre, i contributi relativi della variabile \hat{X}_j ad I_i e ad I sono dati rispettivamente da:

$$\beta_i(\hat{X}_j) = \frac{B_i(\hat{X}_j)}{I_i} = {}_j\gamma, \quad \text{e} \quad \beta(\hat{X}_j) = \frac{B(\hat{X}_j)}{I} = {}_j\gamma. \quad (4.39)$$

In definitiva, nell'ipotesi di trasformazione di scala i contributi relativi di \hat{X}_j ad I_i e ad I coincidono con i contributi relativi ${}_j\gamma$ di \hat{X}_j e di X_j al totale T : infatti, si noti che:

$${}_j\hat{T} = {}_jT, \quad \text{e} \quad {}_j\gamma = \frac{{}_jT}{T}. \quad (4.40)$$

4.3.3 Caso matrice di cograduazione - CM

Zenga M. *et altri* (2012) hanno ottenuto i contributi della variabile ordinata $X_{(j)}$ agli indici I_i^* e I^* . Dalla (4.16) e dalle due relazioni seguenti,

$$\bar{M}_i(Y^*) = \sum_{j=1}^c \bar{M}_i(X_{(j)}), \quad \overset{+}{M}_i(Y^*) = \sum_{j=1}^c \overset{+}{M}_i(X_{(j)}),$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} I_i^* &= \frac{\overset{+}{M}_i(Y^*) - \bar{M}_i(Y^*)}{\overset{+}{M}_i(Y^*)} = \frac{\sum_{j=1}^c \overset{+}{M}_i(X_{(j)}) - \sum_{j=1}^c \bar{M}_i(X_{(j)})}{\sum_{j=1}^c \overset{+}{M}_i(X_{(j)})} \\ &= \sum_{j=1}^c \frac{\overset{+}{M}_i(X_{(j)}) - \bar{M}_i(X_{(j)})}{\overset{+}{M}_i(Y^*)} \\ &= \sum_{j=1}^c B_i^*(X_{(j)}), \end{aligned} \quad (4.41)$$

dove,

$$B_i^*(X_{(j)}) = \frac{\overset{+}{M}_i(X_{(j)}) - \bar{M}_i(X_{(j)})}{\overset{+}{M}_i(Y^*)}, \quad (4.42)$$

è il contributo della j -esima fonte di reddito $X_{(j)}$ all'indice puntuale di ineguaglianza I_i^* .

Il contributo di $X_{(j)}$ ad I^* si ottiene calcolando la media aritmetica di I_i^* :

$$\begin{aligned} I^* &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_i^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^c B_i^*(X_{(j)}) \\ &= \sum_{j=1}^c \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n B_i^*(X_{(j)}) \\ &= \sum_{j=1}^c B^*(X_{(j)}), \end{aligned} \quad (4.43)$$

dove,

$$B^*(X_{(j)}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n B_i^*(X_{(j)}), \quad (4.44)$$

è il contributo di $X_{(j)}$ ad I^* .

In termini relativi, il contributo di $X_{(j)}$ ad I_i^* è dato da:

$$\beta_i^*(X_{(j)}) = \frac{B_i^*(X_{(j)})}{I_i^*} = \frac{\overset{+}{M}_i(X_{(j)}) - \bar{M}_i(X_{(j)})}{\overset{+}{M}_i(Y^*) - \bar{M}_i(Y^*)}, \quad (I_i^* > 0). \quad (4.45)$$

Ovviamente:

$$\sum_{j=1}^c \beta_i^*(X_{(j)}) = 1.$$

La (4.45) informa che, se ad esempio $\beta_i^*(X_{(j)}) = {}_j\alpha_i^*$, la differenza tra la media superiore $\overset{+}{M}_i(X_{(j)})$ e la media inferiore $\bar{M}_i(X_{(j)})$ della variabile ordinata $X_{(j)}$ è pari al $({}_j\alpha_i^* \cdot 100)\%$ della differenza tra la media superiore $\overset{+}{M}_i(Y^*)$ e la media inferiore $\bar{M}_i(Y^*)$ del reddito totale teorico Y^* .

Il contributo relativo della variabile $X_{(j)}$ all'indice sintetico I^* , è fornito da:

$$\begin{aligned} \beta^*(X_{(j)}) &= \frac{B^*(X_{(j)})}{I^*} \\ &= \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n B_i^*(X_{(j)}) \cdot \frac{I_i^*}{I_i^*}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_i^*} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n \beta_i^*(X_{(j)}) \cdot I_i^*}{\sum_{i=1}^n I_i^*}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Ovviamente anche in questo caso vale:

$$\sum_{j=1}^c \beta^*(X_{(j)}) = 1.$$

4.3.4 Relazione tra gli indici di ineguaglianza I^* di Y^* e ${}_jI_i$ di $X_{(j)}$

Dalla relazione (4.43) e dalla (4.27), si ottiene:

$$\begin{aligned}
B_i^*(X_{(j)}) &= \frac{\overset{+}{M}_i(X_{(j)}) - \bar{M}_i(X_{(j)})}{\overset{+}{M}_i(Y^*)} \cdot \frac{\overset{+}{M}_i(X_{(j)})}{\overset{+}{M}_i(X_{(j)})} \\
&= \frac{\overset{+}{M}_i(X_{(j)}) - \bar{M}_i(X_{(j)})}{\overset{+}{M}_i(X_{(j)})} \cdot \frac{\overset{+}{M}_i(X_{(j)})}{\overset{+}{M}_i(Y^*)} \\
&= {}_jI_i \cdot {}_j\gamma_i^+,
\end{aligned} \tag{4.47}$$

dove,

$${}_j\gamma_i^+ = \frac{\overset{+}{M}_i(X_{(j)})}{\overset{+}{M}_i(Y^*)}, \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^c {}_j\gamma_i^+ = 1.$$

Dalle espressioni (4.42) e (4.44) deriva che:

$$I_i^* = \sum_{j=1}^c {}_jI_i \cdot {}_j\gamma_i^+, \tag{4.48}$$

da cui, si ottiene la relazione:

$$I^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_i^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^c {}_jI_i \cdot {}_j\gamma_i^+. \tag{4.49}$$

4.4 Decomposizione dei contributi $B(X_j)$ all'indice sintetico di ineguaglianza I di Y

Sia $D_j = X_j - \hat{X}_j$, ($j = 1, \dots, c$), la differenza tra le variabili X_j e $\hat{X}_j = {}_j\gamma Y$. La variabile D_j assume i valori $d_{ij} = x_{ij} - \hat{x}_{ij}$, ($i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, c$). In altri termini, $X_j = \hat{X}_j + D_j$, e quindi $x_{ij} = \hat{x}_{ij} + d_{ij}$. E' possibile calcolare la media inferiore e superiore della variabile D_j . Dunque,

$$\bar{M}_j(D_j) = \frac{1}{i} \sum_{t=1}^i d_{tj}, \quad i = 1, \dots, n,$$

e

$$\overset{+}{M}_i(D_j) = \begin{cases} \frac{1}{n-i} \sum_{t=i+1}^n d_{tj}, & i = 1, \dots, n-1, \\ d_{nj}, & i = n. \end{cases}$$

Allora,

$$\bar{M}_i(X_j) = \bar{M}_i(\hat{X}_j) + \bar{M}_i(D_j), \quad (4.50)$$

e,

$$\bar{M}_i^+(X_j) = \bar{M}_i^+(\hat{X}_j) + \bar{M}_i^+(D_j). \quad (4.51)$$

Dalla 2 equazioni precedenti e dalla definizione dei contributi $B_i(X_j)$ si ha:

$$\begin{aligned} B_i(X_j) &= \frac{\bar{M}_i^+(\hat{X}_j) - \bar{M}_i(\hat{X}_j)}{\bar{M}_i^+(Y)} + \frac{\bar{M}_i^+(D_j) - \bar{M}_i(D_j)}{\bar{M}_i^+(Y)} \\ &= B_i(\hat{X}_j) + B_i(D_j), \end{aligned} \quad (4.52)$$

dove $B_i(\hat{X}_j) = {}_j\gamma \cdot I_i$ e $B_i(D_j)$ sono rispettivamente i contributi di \hat{X}_j e di D_j a $B_i(X_j)$.

Il contributo relativo di X_j all'indice puntuale I_i si decompone nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \beta_i(X_j) &= \frac{B_i(X_j)}{I_i} = \frac{B_i(\hat{X}_j)}{I_i} + \frac{B_i(D_j)}{I_i} \\ &= \frac{{}_j\gamma \cdot I_i}{I_i} + \beta_i(D_j) \\ &= {}_j\gamma + \beta_i(D_j), \end{aligned} \quad (4.53)$$

dove $\beta_i(D_j)$ è il contributo relativo di D_j ad I_i .

Dall'espressione $I_i = \sum_{j=1}^c B_i(X_j)$, e tenendo conto della (4.52) si ha:

$$\begin{aligned} I_i &= \sum_{j=1}^c [{}_j\gamma \cdot I_i + B_i(D_j)] = I_i \cdot \sum_{j=1}^c {}_j\gamma + \sum_{j=1}^c B_i(D_j) \\ &= I_i + \sum_{j=1}^c B_i(D_j), \end{aligned} \quad (4.54)$$

da cui:

$$\sum_{j=1}^c B_i(D_j) = 0. \quad (4.55)$$

Analogamente, dalla (4.53) si ottiene:

$$\sum_{j=1}^c \beta_j(D_j) = 0. \quad (4.56)$$

In definitiva, il contributo $B(X_j)$ della variabile X_j all'indice sintetico di ineguaglianza I si decompone nel modo seguente:

$$\begin{aligned} B(X_j) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [B_i(\hat{X}_j) + B_i(D_j)] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n B_i(\hat{X}_j) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n B_i(D_j) \\ &= B(\hat{X}_j) + B(D_j) = {}_j\gamma \cdot I + B(D_j). \end{aligned} \quad (4.57)$$

Allo stesso modo si decompone il contributo relativo $\beta(X_j)$ di X_j ad I :

$$\begin{aligned} \beta(X_j) &= \frac{B(X_j)}{I} = \frac{B(\hat{X}_j)}{I} + \frac{B(D_j)}{I} \\ &= \frac{{}_j\gamma \cdot I}{I} + \frac{B(D_j)}{I} = {}_j\gamma + \beta(D_j), \end{aligned} \quad (4.58)$$

dove $\beta(D_j)$ è il contributo relativo della variabile D_j ad I .

La (4.58) informa che il contributo relativo della variabile non ordinata X_j ad I si può esprimere come somma del contributo relativo alla media totale della variabile \hat{X}_j e del contributo relativo della variabile $D_j = X_j - \hat{X}_j$ all'indice sintetico di ineguaglianza I . Si noti che ${}_j\gamma$ è anche il contributo relativo alla media totale della variabile X_j .

Ovviamente vale:

$$\sum_{j=1}^c \beta(D_j) = \sum_{j=1}^c [\beta(X_j) - {}_j\gamma] = 0. \quad (4.59)$$

Dalle (4.55), (4.59) deriva che, se la matrice STM non è uguale alla DM , allora:

- per alcune variabili X_j i contributi relativi all'ineguaglianza sono più grandi dei rispettivi contributi ${}_j\gamma$ al totale Y ;
- per alcune variabili X_t , $t \neq j$, i contributi relativi all'ineguaglianza sono più piccoli dei rispettivi contributi ${}_j\gamma$ al totale Y .

Per la comparazione dei contributi $B_i(X_j)$ e $\beta(X_j)$ con $B_i(\hat{X}_j)$ e $\beta(\hat{X}_j)$ sono utili i seguenti Lemmi, per la cui dimostrazione si rimanda a Zenga *et altri* (2012).

Lemma 1

- Se $B_i(X_j) \leq B_i(\hat{X}_j)$, $i = 1, \dots, n$, con almeno una disuguaglianza stretta, allora $\beta(X_j) < \beta(\hat{X}_j)$.

Lemma 2

- Se $\overset{+}{M}_i(X_j) \leq \overset{+}{M}_i(\hat{X}_j)$ $i = 1, \dots, n$, con almeno una disuguaglianza stretta, allora $\beta(X_j) < \beta(\hat{X}_j)$.

Lemma 3

- Se esiste un intero $1 \leq t \leq n - 1$, tale che:

1. $x_{ij} \geq \hat{x}_{ij}$, $i = 1, \dots, t$, con almeno una disuguaglianza stretta,
2. $x_{ij} \leq \hat{x}_{ij}$, $i = t + 1, \dots, n$, con almeno una disuguaglianza stretta,

allora $\beta(X_j) < \beta(\hat{X}_j) = {}_j\gamma$.

4.5 Decomposizione dei contributi $B^*(X_{(j)})$ di $X_{(j)}$ all'ineguaglianza I^* della variabile Y^*

Sia $R_j = X_{(j)} - X_j$, ($j = 1 \dots, c$), la differenza tra le variabili $X_{(j)}$ e X_j . La variabile R_j assume i valori $r_{ij} = x_{(ij)} - x_{ij}$, ($i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, n$). In altri termini, $X_{(j)} = X_j + R_j$, e quindi $x_{(ij)} = x_{ij} + r_{ij}$. La media inferiore e superiore della variabile R_j ottenute nel modo usuale, sono date rispettivamente da:

$$\bar{M}_j(R_j) = \frac{1}{i} \sum_{t=1}^i r_{tj}, \quad i = 1, \dots, n,$$

e

$$\overset{+}{M}_i(R_j) = \begin{cases} \frac{1}{n-i} \sum_{t=i+1}^n r_{tj}, & i = 1, \dots, n-1, \\ r_{nj}, & i = n. \end{cases}$$

Visto che $X_{(j)} = X_j + R_j$ e grazie alla proprietà associativa della media aritmetica, si ottiene:

$$\bar{M}_i(X_{(j)}) = \bar{M}_i(X_j) + \bar{M}_i(R_j), \quad (4.60)$$

e,

$$\overset{+}{M}_i(X_{(j)}) = \overset{+}{M}_i(X_j) + \overset{+}{M}_i(R_j). \quad (4.61)$$

Dalla 2 equazioni precedenti e dalla definizione dei contributi $B_i^*(X_{(j)})$ si ha:

$$\begin{aligned} B_i^*(X_{(j)}) &= \frac{\overset{+}{M}_i(X_{(j)}) - \bar{M}_i(X_{(j)})}{\overset{+}{M}_i(Y^*)} = \frac{\overset{+}{M}_i(X_j) + \overset{+}{M}_i(R_j) - \bar{M}_i(X_j) - \bar{M}_i(R_j)}{\overset{+}{M}_i(Y^*)} \\ &= \frac{\overset{+}{M}_i(X_j) - \bar{M}_i(X_j)}{\overset{+}{M}_i(Y^*)} + \frac{\overset{+}{M}_i(R_j) - \bar{M}_i(R_j)}{\overset{+}{M}_i(Y^*)} \\ &= B_i^*(X_j) + B_i^*(R_j), \end{aligned} \quad (4.62)$$

dove $B_i^*(X_j)$ e $B_i^*(R_j)$ sono rispettivamente i contributi di X_j e di R_j a $B_i^*(X_{(j)})$. La decomposizione richiesta si ottiene calcolando la media aritmetica dei contributi $B_i^*(X_{(j)})$:

$$\begin{aligned} B^*(X_{(j)}) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n B_i^*(X_{(j)}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [B_i^*(X_j) + B_i^*(R_j)] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n B_i^*(X_j) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n B_i^*(R_j) \\ &= B^*(X_j) + B^*(R_j). \end{aligned} \quad (4.63)$$

Per l'interpretazione delle decomposizioni (4.62), (4.63), risulta utile il seguente:

Lemma 4.5.1.

$$\left[\overset{+}{M}_i(R_j) - \bar{M}_i(R_j) \right] \geq 0, \quad \forall i, j.$$

Dimostrazione. Da

$$Q_i(X_{(j)}) \leq Q_i(X_j), \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.64)$$

deriva che

$$\bar{M}_i(X_{(j)}) \leq \bar{M}_i(X_j) \quad \text{e} \quad \overset{+}{M}_i(X_{(j)}) \leq \overset{+}{M}_i(X_j). \quad (4.65)$$

Di conseguenza:

$$\bar{M}_i(R_j) = [\bar{M}_i(X_{(j)}) - \bar{M}_i(X_j)] \leq 0 \text{ e } \bar{M}_i^+(R_j) = [\bar{M}_i^+(X_{(j)}) - \bar{M}_i^+(X_j)] \geq 0. \quad (4.66)$$

Dunque,

$$[\bar{M}_i^+(R_j) - \bar{M}_i(R_j)] \geq 0, \forall i, j. \quad (4.67)$$

□

Dal Lemma 4.5.1 deriva che:

$$B_i^*(R_j) \geq 0, \forall i, j, \text{ e } B^*(R_j) \geq 0, \forall j,$$

ossia il contributo a $B^*(X_{(j)})$ è maggiore o uguale a 0, con uguaglianza solo nel caso: $x_{1j} \leq x_{2j} \leq \dots \leq x_{nj}$.

4.5.1 Contributi delle variabili X_j ed R_j agli indici puntuale I_i^* e sintetico I^* di ineguaglianza

La variabile Y^* può essere rappresentata nel seguente modo:

$$\begin{aligned} Y^* &= X_{(1)} + \dots + X_{(j)} + \dots + X_{(c)} \\ &= (X_1 + R_1) + \dots + (X_j + R_j) + \dots + (X_c + R_c) \\ &= (X_1 + \dots + X_c) + (R_1 + \dots + R_c) \\ &= Y + R, \end{aligned} \quad (4.68)$$

dove $R = \sum_{j=1}^c R_j$ assume i valori $r_i = \sum_{j=1}^c r_{ij} = \sum_{j=1}^c (x_{(ij)} - x_{ij}) = y_{(i)}^* - y_{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Dalla (4.68) è possibile decomporre l'indice puntuale I_i^* come somma dei contributi delle variabili Y ed R . In particolare,

$$\begin{aligned} I_i^* &= \sum_{j=1}^c B_i^*(X_{(j)}) \\ &= \sum_{j=1}^c (B_i^*(X_j) + B_i^*(R_j)) \\ &= B_i^*(Y) + B_i^*(R), \end{aligned} \quad (4.69)$$

dove $B_i^*(X_j)$ e $B_i^*(R_j)$ sono stati definiti nella (4.62) e dove,

$$B_i^*(Y) = \frac{\overset{+}{M}_i(Y) - \bar{M}_i(Y)}{\overset{+}{M}_i(Y^*)}, \quad B_i^*(R) = \frac{\overset{+}{M}_i(R) - \bar{M}_i(R)}{\overset{+}{M}_i(Y^*)}. \quad (4.70)$$

In definitiva,

$$B_i^*(Y^*) = \frac{\overset{+}{M}_i(Y^*) - \bar{M}_i(Y^*)}{\overset{+}{M}_i(Y^*)} = B_i^*(Y) + B_i^*(R) = I_i^*. \quad (4.71)$$

La scomposizione di I^* si ottiene calcolando la media aritmetica dei contributi $B_i^*(Y^*)$:

$$\begin{aligned} I^* &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n B_i^*(Y^*) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [B_i^*(Y) + B_i^*(R)] \\ &= B^*(Y) + B^*(R) \\ &= B^*(Y^*). \end{aligned} \quad (4.72)$$

Il contributo relativo di X_j ed R_j ad I_i^* è dato da:

$$\beta_i^*(Y^*) = \frac{B_i^*(Y)}{I_i^*} + \frac{B_i^*(R)}{I_i^*} = \beta_i^*(Y) + \beta_i^*(R), \quad (4.73)$$

dove $\beta_i^*(Y^*) = \sum_{j=1}^c \beta_i^*(X_{(j)}) = 1$ e $\beta_i^*(X_{(j)}) = \frac{B_i^*(X_{(j)})}{I_i^*}$.

In modo analogo si ottiene il contributo relativo delle variabili X_j ed R_j ad I :

$$\beta^*(Y^*) = \beta^*(Y) + \beta^*(R), \quad (4.74)$$

dove $\beta^*(Y) = \frac{B^*(Y)}{I^*}$ e $\beta^*(R) = \frac{B^*(R)}{I^*}$.

4.5.2 Contributi delle variabili $X_{(j)}$ ed R_j agli indici puntuale I_i e sintetico I di ineguaglianza

La variabile Y può essere rappresentata dalla seguente relazione:

$$\begin{aligned} Y &= X_1 + \cdots + X_2 + \cdots + X_c \\ &= (X_{(1)} - R_1) + \cdots + (X_{(j)} - R_j) + \cdots + (X_{(c)} - R_c) \\ &= (X_{(1)} + \cdots + X_{(c)}) - (R_1 + \cdots + R_c) \\ &= Y^* - R, \end{aligned} \quad (4.75)$$

Dalla (4.75) è possibile decomporre l'indice puntuale I_i come differenza tra i contributi delle variabili Y^* ed R . In particolare,

$$\begin{aligned}
 I_i &= \sum_{j=1}^c B_i(X_j) \\
 &= \sum_{j=1}^c (B_i(X_{(j)}) - B_i(R_j)) \\
 &= \frac{\overset{+}{M}_i(X_{(j)}) - \bar{M}_i(X_{(j)})}{\overset{+}{M}_i(Y)} - \frac{\overset{+}{M}_i(R_j) - \bar{M}_i(R_j)}{\overset{+}{M}_i(Y)} \\
 &= B_i(Y^*) - B_i(R),
 \end{aligned} \tag{4.76}$$

dove,

$$B_i(Y^*) = \frac{\overset{+}{M}_i(Y^*) - \bar{M}_i(Y^*)}{\overset{+}{M}_i(Y)}, \quad B_i(R) = \frac{\overset{+}{M}_i(R) - \bar{M}_i(R)}{\overset{+}{M}_i(Y)}. \tag{4.77}$$

In definitiva,

$$B_i(Y) = \frac{\overset{+}{M}_i(Y) - \bar{M}_i(Y)}{\overset{+}{M}_i(Y)} = B_i(Y^*) - B_i(R) = I_i. \tag{4.78}$$

La scomposizione dell'indice sintetico I si ottiene calcolando la media aritmetica dei contributi $B_i(Y)$:

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n B_i(Y) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [B_i(Y^*) - B_i(R)] \\
 &= B(Y^*) - B(R) \\
 &= B(Y).
 \end{aligned} \tag{4.79}$$

I contributi relativi di $X_{(j)}$ ed R_j ad I_i e a d I sono dati rispettivamente da:

$$\beta_i(Y) = \frac{B_i(Y^*)}{I_i} - \frac{B_i(R)}{I_i} = \beta_i(Y^*) - \beta_i(R), \tag{4.80}$$

$$\beta(Y) = \frac{B(Y^*)}{I} - \frac{B(R)}{I} = \beta(Y^*) - \beta(R). \tag{4.81}$$

4.5.3 Relazioni tra i contributi della scomposizione degli indici I_i^* ed I_i

Si mostrerà adesso la relazione tra i contributi $B_i^*(Y)$ e $B_i^*(R)$ degli indici I_i^* ed i contributi $B_i(Y^*)$ e $B_i(R)$ degli indici I_i . Dalle espressioni,

$$B_i^*(X_{(j)}) = \frac{\overset{+}{M}_i(X_{(j)}) - \bar{M}_i(X_{(j)})}{\overset{+}{M}_i(Y^*)}, \quad B_i(X_j) = \frac{\overset{+}{M}_i(X_j) - \bar{M}_i(X_j)}{\overset{+}{M}_i(Y)}, \quad (4.82)$$

e dai rapporti, $A_i = \frac{\overset{+}{M}_i(Y)}{\overset{+}{M}_i(Y^*)}$, $i = 1, \dots, n$, è possibile ottenere le relazioni suddette:

$$\begin{cases} B_i^*(X_j) = B_i(X_j) \cdot A_i \\ B_i^*(R_j) = B_i^*(X_{(j)}) - B_i^*(X_j) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^c B_i^*(X_j) = B_i^*(Y) = I_i \cdot A_i \\ \sum_{j=1}^c B_i^*(R_j) = B_i^*(R) = I_i^* - A_i \cdot I_i, \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_i(X_{(j)}) = B_i^*(X_{(j)}) \cdot A_i^{-1} \\ B_i(R_j) = B_i(X_{(j)}) - B_i(X_j) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^c B_i(X_{(j)}) = B_i(Y^*) = I_i^* \cdot A_i^{-1} \\ \sum_{j=1}^c B_i(R_j) = B_i(R) = I_i^* - A_i^{-1} \cdot I_i. \end{cases}$$

Capitolo 5

Applicazione e presentazione dei risultati

5.1 Introduzione

Nel presente capitolo si applicherà la decomposizione per fonti di reddito alla serie storica delle indagini campionarie della Banca d'Italia. In particolare, l'analisi sarà effettuata solo sulla serie storica 1987 – 2010 che, ricordiamo, nella definizione dell'aggregato *reddito familiare disponibile netto* include anche i proventi da capitale finanziario. La metodologia descritta nel capitolo precedente si applicherà alle 12 distribuzioni reali con riferimento ai soli RF escludendo quindi i RFP ed i RFE. Appare utile, delineare preliminarmente, le caratteristiche delle variabili che formano il reddito di ciascuna famiglia. Per ciascuna famiglia, il reddito disponibile netto Y è dato dalla somma delle seguenti fonti:

- X_1 : reddito da lavoro dipendente,
- X_2 : pensioni e trasferimenti netti,
- X_3 : reddito netto da lavoro autonomo,
- X_4 : reddito da capitale.

Ciascuna fonte di reddito si compone a sua volta di numerose sottovoci come di seguito mostrato.

Reddito da lavoro dipendente

Il reddito da lavoro dipendente è dato dalla somma delle retribuzioni nette e delle integrazioni non monetarie.

- **Retribuzioni nette:** compensi, inclusi gli straordinari, percepiti complessivamente in relazione all'attività di lavoratore dipendente al netto delle imposte e dei contributi previdenziali e assistenziali. Sono incluse altresì i compensi per le mensilità aggiuntive quali tredicesima, quattordicesima, le gratifiche o indennità speciali, ed altri compensi quali assegni familiari, premi di produzione, percentuali sulle vendite.
- **Integrazioni non monetarie:** si tratta di integrazioni del reddito sotto forma di compensi come ticket pasto, viaggi premi, auto della società o altre forme di benefici con esclusione dell'eventuale alloggio.

Pensioni e trasferimenti netti

Pensioni e trasferimenti netti sono dati dalla somma di due macrovoci: pensioni ed arretrati, altri trasferimenti

- **Pensioni ed arretrati:** importi ed eventuali arretrati di pensione al netto delle imposte. Sono comprese le tipologie di pensione da lavoro (previdenziale), sociale (assistenziale), di inabilità o invalidità (previdenziale e sociale), di reversibilità, di guerra, complementare o integrativa (da contribuzione volontaria).
- **Altri trasferimenti:** comprendono tipologie di entrate di assistenza economica quali assegno di accompagnamento per persone disabili, assegno di mantenimento, minimo alimentare e assegni della cassa integrazione, indennità di mobilità, indennità di disoccupazione speciale e ordinaria. Sono ricomprese inoltre, borse di studio, assegni per alimenti e regali o contributi in denaro ricorrenti da parenti o amici non conviventi al netto delle medesime voci in uscita. Sono invece escluse eventuali liquidazioni.

Reddito netto da lavoro autonomo

Sono considerati lavoratori autonomi i liberi professionisti, gli imprenditori individuali, i lavoratori atipici quali CO.CO.CO., collaboratori occasionali, lavoro a progetto ecc. Il reddito netto da lavoro autonomo è pari alla somma delle due macrovoci seguenti.

- Reddito netto da lavoro autonomo: proventi dell'attività lavorativa al netto delle spese, delle tasse e dei contributi versati. Dunque, i proventi netti sono pari alle entrate (ricavi dalla vendita di prodotti o servizi al netto di IVA e proventi diversi) meno le uscite (spese di manutenzione ordinaria, acquisto di materie prime o merci, compensi al personale dipendente, eventuali affitto di locali, imposte, oneri fiscali, contributi ed altre uscite quali interessi passivi, canoni di leasing e ammortamenti).
- Utili ed altri redditi da partecipazione: compensi fissi relativi all'attività svolta all'interno della società ed ammontare degli utili al netto delle imposte.

Reddito da capitale

Il reddito da capitale comprende il reddito da fabbricati ed il reddito da capitale finanziario che è pari al prodotto tra tasso di interesse e stock di capitale.

- Reddito da fabbricati: comprende gli affitti percepiti dalla famiglia in relazione agli immobili posseduti (fabbricati, terreni agricoli e non agricoli) e concessi in affitto ad esclusione dell'abitazione di residenza. Tale voce comprende altresì gli affitti imputati ossia i canoni mensili o annuali di affitto che si potrebbero ottenere se, per ipotesi, si volesse concedere in affitto l'immobile di residenza o gli altri beni immobili.
- Reddito da capitale finanziario: comprende gli interessi attivi sui depositi o libretti di deposito a risparmio bancari o postali, certificati di deposito, pronti contro termine, buoni fruttiferi postali. Sono altresì compresi gli interessi attivi sui titoli di Stato quali per esempio BOT, CCT, BTP e i rendimenti su altri titoli quali obbligazioni, quote di fondi comuni italiani, azioni partecipazioni italiane, gestioni patrimoniali, titoli esteri emessi da non residenti. Dall'aggregato appena dettagliato vanno sottratti gli interessi passivi, derivanti dall'indebitamento nei confronti di banche, società finanziarie, legato alle esigenze

familiari (vanno quindi esclusi gli indebitamenti legati all'attività professionale). Sono esempi di indebitamento per esigenze familiari i debiti per l'acquisto di beni reali come preziosi, oro, per l'acquisto di mezzi di trasporto (auto per esempio), ed infine per l'acquisto per beni durevoli (mobili, elettrodomestici, ecc) e non durevoli (vacanze, pellicce, ecc).

5.2 L'evoluzione dei contributi all'ineguaglianza negli ultimi venticinque anni

Nella tabella 5.1 si riportano i contributi assoluti e relativi alla diseguaglianza del reddito totale Y in riferimento alla serie storica 1987–2010. Per l'anno 2010, per esempio, l'indice I calcolato sui RF è pari a 0,6904: vi contribuisce per il 37,5% il reddito da lavoro dipendente, per circa il 16% le pensioni e i trasferimenti netti, per il 20% il reddito da lavoro autonomo ed infine per il 26% il reddito da capitale. Se si analizza nel complesso la serie storica, emerge come, i contributi relativi del reddito da lavoro dipendente alla ineguaglianza mostrano un trend discendente, passando da valori attorno al 50% nel 1989 al 39,5% nel 2008. Si registra una lieve flessione nel 2010. Risulta chiaro altresì l'andamento ascendente delle pensioni e trasferimenti netti: da valori attorno allo zero sul finire degli anni ottanta, si passa ad una quota del 17% nel 2008 e si registra una lieve flessione nel 2010 rispetto al 2008 come per i contributi relativi dei redditi da lavoro dipendente.

Anno	I	${}_1I$	${}_2I$	${}_3I$	${}_4I$	$B(X_1)$	$B(X_2)$	$B(X_3)$	$B(X_4)$	$\sum_j B(X_j)$	$\beta(X_1)$	$\beta(X_2)$	$\beta(X_3)$	$\beta(X_4)$	$\sum_j \beta(X_j)$
1987	0.7110	0.9068	0.9575	0.9921	0.9303	0.3191	-0.0104	0.2656	0.1367	0.7109	0.4488	-0.0147	0.3735	0.1922	1
1989	0.6674	0.9038	0.9537	0.9908	0.9009	0.3343	-0.0033	0.1828	0.1534	0.6673	0.5010	-0.0049	0.2740	0.2298	1
1991	0.6612	0.9115	0.9422	0.9919	0.8919	0.3208	0.0097	0.1713	0.1594	0.6612	0.4852	0.0147	0.2590	0.2410	1
1993	0.7107	0.9277	0.9296	0.9949	0.9009	0.3268	0.0573	0.1253	0.2012	0.7106	0.4599	0.0807	0.1763	0.2831	1
1995	0.7073	0.9304	0.9273	0.9949	0.8881	0.3047	0.0749	0.1334	0.1942	0.7072	0.4309	0.1058	0.1886	0.2746	1
1998	0.7099	0.9242	0.9403	0.9944	0.8788	0.2883	0.0721	0.1546	0.1948	0.7098	0.4061	0.1016	0.2178	0.2744	1
2000	0.7091	0.9317	0.9305	0.9947	0.8769	0.2948	0.0649	0.1676	0.1817	0.7091	0.4158	0.0915	0.2364	0.2563	1
2002	0.7035	0.9408	0.9207	0.9957	0.8711	0.2874	0.0713	0.1834	0.1613	0.7034	0.4085	0.1014	0.2607	0.2293	1
2004	0.6945	0.9382	0.9194	0.9972	0.8678	0.2762	0.0697	0.1975	0.1510	0.6944	0.3977	0.1003	0.2843	0.2174	1
2006	0.6859	0.9362	0.9208	0.9971	0.8574	0.2794	0.0775	0.1755	0.1533	0.6858	0.4074	0.1130	0.2559	0.2235	1
2008	0.6816	0.9389	0.9218	0.9967	0.8572	0.2695	0.1176	0.1340	0.1605	0.6815	0.3953	0.1725	0.1966	0.2355	1
2010	0.6904	0.9459	0.9179	0.9965	0.8565	0.2591	0.1099	0.1423	0.1791	0.6903	0.3752	0.1592	0.2060	0.2594	1

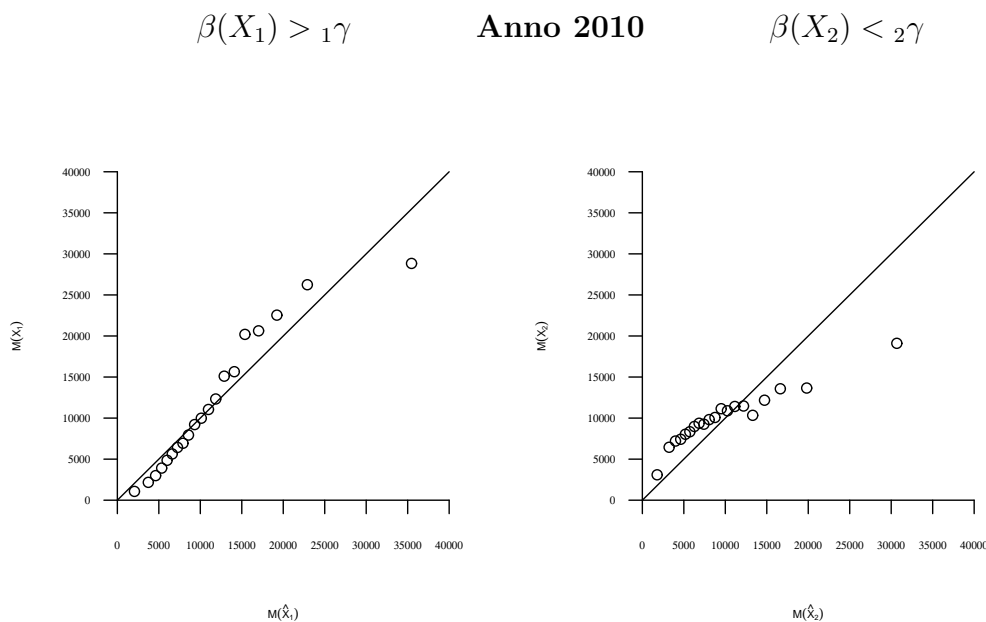
Tabella 5.1: Contributi assoluti e relativi alla diseguaglianza di Y ed indici sintetici di ineguaglianza relativi a ciascuna fonte di reddito.

Per quanto riguarda il reddito da lavoro autonomo e da capitale, i contributi relativi all'ineguaglianza si attestano attorno a valori medio alti. In particolare, gli

apporti relativi all'ineguaglianza del reddito da capitale oscillano tra il 19% del 1987 ed il 28% del 1993, mentre nel caso dei redditi da lavoro autonomo, a parte il 1987 in cui si registra un valore molto distante dagli altri, i contributi relativi oscillano tra il 17% del 1993 ed il 28% del 2004.

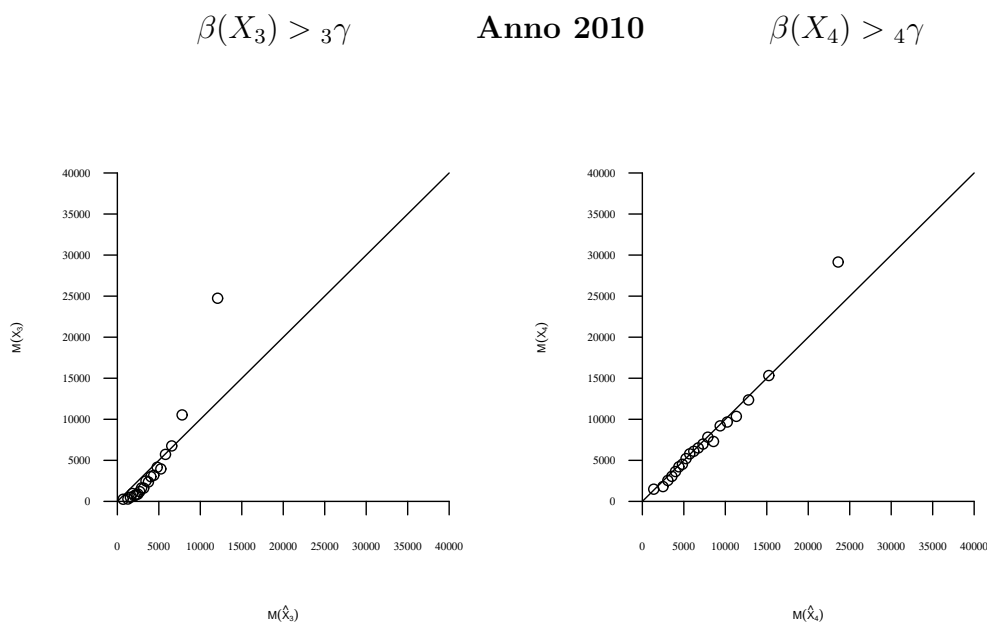
Per la comparazione dei contributi relativi $\beta(X_j)$ con le quote ${}_j\gamma = \beta(\hat{X}_j)$ è utile il Lemma 3 (Zenga *et altri*, 2012).

A titolo esemplificativo, si è considerato l'anno 2010 suddividendo la distribuzione dei redditi familiari in 20 classi: per ciascuna classe approssimativamente comprendente il 5% delle osservazioni, si è calcolata la media aritmetica $M_h(\hat{X}_j)$, ($h = 1, \dots, 20, j = 1, \dots, 4$) nel caso della matrice *STM* e $M_h(X_j)$, ($h = 1, \dots, 20, j = 1, \dots, 4$) nel caso della *DM*. Nei grafici seguenti si confrontano, per ciascuna variabile, le medie delle venti classi considerate, riportando le medie $M_h(\hat{X}_j)$ in ascissa ed in ordinata le medie $M_h(X_j)$.



Per la variabile X_2 (pensioni e trasferimenti netti) il comportamento dei 20 punti $(M_h(\hat{X}_j), M_h(X_j))$ rispetta le ipotesi del Lemma 3: pertanto il contributo relativo della variabile X_2 all'ineguaglianza è minore del suo contributo alla media totale. Per la variabile X_1 (reddito da lavoro dipendente) il comportamento dei 20 punti $(M_h(\hat{X}_j), M_h(X_j))$ rispetta altresì, con poche eccezioni, le ipotesi del Lemma 3

ma con segno delle disuguaglianze invertite: pertanto il contributo relativo della variabile X_1 all'ineguaglianza è maggiore del suo contributo alla media totale.



Per le restanti variabili X_3 (reddito da lavoro autonomo) ed X_4 (reddito da capitale) il comportamento dei punti $(M_h(\hat{X}_j), M_h(X_j))$ è analogo a quello della variabile X_1 e pertanto valgono le stesse considerazioni.

La tabella 5.2 riporta in riferimento a ciascuna indagine, la scomposizione dei contributi delle quattro fonti di reddito alla ineguaglianza. In particolare, nella tabella si riportano i risultati delle comparazioni tra i contributi $\beta(X_j)$ e $\beta(\hat{X}_j) = {}_j\gamma$. Osservando i contributi $\beta(D_j)$ per esempio nell'anno 2010, si nota come per le pensioni ed i trasferimenti netti il contributo $\beta(D_2)$ sia pari a $-0,142$ ossia, confermando quanto visto nel grafico precedente, il contributo relativo ad I è minore del suo contributo alla media totale. In altri termini, le pensioni ed i trasferimenti netti tendono a far diminuire l'ineguaglianza, mentre le variabili X_1, X_3, X_4 aumentano l'ineguaglianza. Passando all'analisi temporale, se il comportamento della variabile X_2 è il medesimo in ciascuna indagine oscillando all'interno dei valori compresi tra $-0,18$ del 1989 e $-0,128$ del 1998, l'incidenza delle restanti variabili è pressoché stabile nel tempo (con qualche lieve eccezione). In conclusione, l'evidenza empirica mostra come, negli ultimi venticinque anni, le pensioni ed i trasferimenti netti hanno in qualche misura "attenuato" l'ineguaglianza.

	1987	1989	1991	1993	1995	1998	2000	2002	2004	2006	2008	2010
$B(X_1)$	0.319	0.334	0.321	0.327	0.305	0.288	0.295	0.287	0.276	0.279	0.269	0.259
$B(\tilde{X}_1)$	0.330	0.311	0.292	0.296	0.279	0.282	0.275	0.261	0.257	0.257	0.250	0.240
$B(D_1)$	-0.011	0.023	0.029	0.031	0.026	0.007	0.019	0.026	0.019	0.022	0.020	0.019
$\beta(X_1)$	0.449	0.501	0.485	0.460	0.431	0.406	0.416	0.408	0.398	0.407	0.395	0.375
$\beta(\tilde{X}_1)$	0.465	0.466	0.442	0.416	0.394	0.397	0.388	0.372	0.371	0.375	0.367	0.348
$\beta(D_1)$	-0.016	0.035	0.043	0.044	0.037	0.009	0.027	0.037	0.027	0.033	0.029	0.027
$B(X_2)$	-0.010	-0.003	0.010	0.057	0.075	0.072	0.065	0.071	0.070	0.078	0.118	0.110
$B(\tilde{X}_2)$	0.112	0.117	0.137	0.169	0.175	0.163	0.171	0.188	0.188	0.190	0.206	0.208
$B(D_2)$	-0.122	-0.120	-0.127	-0.112	-0.101	-0.091	-0.106	-0.117	-0.118	-0.112	-0.088	-0.098
$\beta(X_2)$	-0.015	-0.005	0.015	0.081	0.106	0.102	0.092	0.101	0.100	0.113	0.173	0.159
$\beta(\tilde{X}_2)$	0.158	0.175	0.207	0.238	0.248	0.229	0.240	0.267	0.271	0.276	0.302	0.301
$\beta(D_2)$	-0.172	-0.180	-0.192	-0.157	-0.142	-0.128	-0.149	-0.166	-0.171	-0.163	-0.130	-0.142
$B(X_3)$	0.266	0.183	0.171	0.125	0.133	0.155	0.168	0.183	0.197	0.176	0.134	0.142
$B(\tilde{X}_3)$	0.158	0.120	0.108	0.087	0.090	0.100	0.104	0.104	0.104	0.093	0.077	0.082
$B(D_3)$	0.107	0.063	0.063	0.038	0.043	0.054	0.064	0.079	0.094	0.083	0.057	0.060
$\beta(X_3)$	0.374	0.274	0.259	0.176	0.189	0.218	0.236	0.261	0.284	0.256	0.197	0.206
$\beta(\tilde{X}_3)$	0.223	0.180	0.163	0.123	0.128	0.141	0.147	0.148	0.149	0.135	0.114	0.119
$\beta(D_3)$	0.151	0.094	0.096	0.054	0.061	0.077	0.090	0.112	0.135	0.121	0.083	0.088
$B(X_4)$	0.137	0.153	0.159	0.201	0.194	0.195	0.182	0.161	0.151	0.153	0.160	0.179
$B(\tilde{X}_4)$	0.110	0.119	0.125	0.159	0.163	0.165	0.159	0.150	0.145	0.147	0.148	0.160
$B(D_4)$	0.026	0.034	0.035	0.042	0.032	0.030	0.023	0.012	0.006	0.007	0.012	0.019
$\beta(X_4)$	0.192	0.230	0.241	0.283	0.275	0.274	0.256	0.229	0.217	0.224	0.235	0.259
$\beta(\tilde{X}_4)$	0.155	0.179	0.188	0.223	0.230	0.232	0.224	0.213	0.209	0.214	0.217	0.232
$\beta(D_4)$	0.037	0.051	0.053	0.060	0.045	0.042	0.032	0.017	0.008	0.010	0.018	0.028

Tabella 5.2: Decomposizione dei Contributi assoluti e relativi alla diseguaglianza del totale Y .

5.3 Contributi all'ineguaglianza del reddito totale teorico Y^*

Prima di concludere il presente capitolo dedicato alla scomposizione, si veda la tabella 5.3, la quale riporta i contributi assoluti e relativi alla diseguaglianza del reddito totale teorico Y^* nel caso della matrice di cograduazione¹. Inoltre, si riporta il valore dell'indice I^* nel caso di uniforme ordinamento tra le fonti di reddito. L'allontanamento dalla situazione teorica informa dell'associazione ascrivibile alle fonti di reddito considerate. Per esempio, per il 2010, il rapporto,

$$\frac{I^* - I}{I^*} = \frac{0,9301 - 0,6904}{0,9301} = 0,258, \quad (5.1)$$

informa che vi è una riduzione di circa il 26% dell'indice I^* da imputare all'associazione esistente tra le fonti economiche. Tale riduzione è dovuta per il 29,87%

¹La CM ha un importante ruolo in talune decomposizioni degli indici di ineguaglianza nel caso della somma. Si veda, per esempio, Radaelli P., Zenga M. (2005), *On the decomposition of the Gini mean difference and concentration ratio*. *Statistica & Applicazioni*, III(2), 5-24.

$\left(\frac{B^*(X_{(1)})-B(X_1)}{I^*-I} = \frac{0,3307-0,2591}{0,2397} = 0,2987\right)$ alla variabile X_1 (reddito da lavoro dipendente), per il 4% al reddito da lavoro autonomo, per circa l' 1,5% al reddito da capitale e per il 64,5% alle pensioni e trasferimenti netti.

L'analisi temporale dei contributi relativi all'ineguaglianza I^* mostra come i $\beta^*(X_{(j)})$ hanno un comportamento assimilabile a quello dei contributi relativi $\beta(X_j)$ nel caso della variabile Y . In particolare, si osserva un andamento decrescente per il reddito da lavoro dipendente, crescente per le pensioni ed i trasferimenti netti ed una sostanziale stabilità su valori medio alti per i redditi da lavoro autonomo e da capitale.

Anno	I^*	$\beta^*(X_{(1)})$	$\beta^*(X_{(2)})$	$\beta^*(X_{(3)})$	$\beta^*(X_{(4)})$	$\sum_j \beta^*(X_{(j)})$	$B^*(X_{(1)})$	$B^*(X_{(2)})$	$B^*(X_{(3)})$	$B^*(X_{(4)})$	$\sum_j B^*(X_{(j)})$	$\beta^*(X_{(1)})$	$\beta^*(X_{(2)})$	$\beta^*(X_{(3)})$	$\beta^*(X_{(4)})$	$\sum_j \beta^*(X_{(j)})$
1987	0.9448	0.4236	0.1580	0.2630	0.1553	1	0.3883	0.1517	0.2602	0.1445	0.9448	0.4110	0.1606	0.2754	0.1530	1
1989	0.9350	0.4298	0.1782	0.2165	0.1755	1	0.3926	0.1702	0.2137	0.1585	0.9350	0.4199	0.1820	0.2286	0.1695	1
1991	0.9338	0.4140	0.2052	0.1987	0.1821	1	0.3807	0.1939	0.1963	0.1629	0.9338	0.4077	0.2076	0.2103	0.1744	1
1993	0.9358	0.3987	0.2292	0.1536	0.2184	1	0.3721	0.2142	0.1524	0.1971	0.9358	0.3977	0.2289	0.1628	0.2106	1
1995	0.9339	0.3806	0.2387	0.1613	0.2193	1	0.3560	0.2225	0.1600	0.1954	0.9339	0.3812	0.2382	0.1714	0.2092	1
1998	0.9336	0.3776	0.2258	0.1758	0.2208	1	0.3515	0.2131	0.1743	0.1948	0.9336	0.3765	0.2282	0.1867	0.2086	1
2000	0.9346	0.3750	0.2315	0.1828	0.2108	1	0.3512	0.2166	0.1812	0.1856	0.9346	0.3757	0.2318	0.1939	0.1986	1
2002	0.9359	0.3648	0.2521	0.1867	0.1963	1	0.3445	0.2339	0.1854	0.1721	0.9359	0.3681	0.2499	0.1981	0.1838	1
2004	0.9355	0.3616	0.2550	0.1935	0.1899	1	0.3407	0.2363	0.1925	0.1659	0.9355	0.3642	0.2526	0.2058	0.1774	1
2006	0.9316	0.3668	0.2633	0.1773	0.1927	1	0.3448	0.2440	0.1763	0.1665	0.9316	0.3702	0.2619	0.1893	0.1787	1
2008	0.9294	0.3629	0.2920	0.1472	0.1978	1	0.3418	0.2704	0.1463	0.1708	0.9294	0.3678	0.2910	0.1575	0.1838	1
2010	0.9301	0.3488	0.2862	0.1527	0.2123	1	0.3307	0.2645	0.1518	0.1831	0.9301	0.3556	0.2844	0.1632	0.1969	1

Tabella 5.3: Contributi assoluti e relativi alla diseguaglianza di Y^* nel caso della matrice di cograduazione.

Passando agli effetti del riordinamento, la tabella 4 riportata in appendice, mostra, in riferimento a ciascuna indagine, la scomposizione dei contributi assoluti $B^*(X_{(j)})$ e relativi $\beta^*(X_{(j)})$ alla ineguaglianza del reddito totale teorico Y^* . L'effetto dovuto al riordinamento è pressoché costante in tutte e quattro le fonti di reddito e presenta valori più alti nel caso delle pensioni e dei trasferimenti netti.

Capitolo 6

Conclusioni

Nella prima parte di questo lavoro si è focalizzata l'attenzione sullo studio delle dinamiche temporali dell'ineguaglianza dei redditi familiari italiani negli ultimi 35 anni attraverso il confronto degli indici di ineguaglianza G di Gini (1914) ed I di Zenga (2007). Oltre ad analizzare due distinte serie storiche dei redditi familiari italiani¹, si è tenuto conto, da una parte dei pesi campionari da attribuire a ciascuna famiglia, dall'altra dei redditi familiari equivalenti. Nel complesso, si sono analizzate 33 distribuzioni distinguendo tre diverse definizioni di reddito familiare disponibile netto: in totale quindi, le analisi empiriche hanno interessato 99 distribuzioni reali.

Le analisi condotte hanno mostrato una diminuzione dell'ineguaglianza dei redditi familiari disponibili netti dalla seconda metà degli anni settanta fino al 1982, con l'eccezione del biennio 1978 – 1979. Successivamente una fase di crescita fino al 1987, per poi diminuire nel quadriennio successivo. Il brusco aumento tra il 1991 e il 1993, in corrispondenza della grave crisi finanziaria, riporta gli indici I e G sui valori del 1980. Dal 1993 le misure sintetiche di ineguaglianza considerate mostrano una leggera fase discendente fino al 2008 in corrispondenza del quale si registra una ripresa dell'ineguaglianza. Dunque, se negli ultimi trentacinque anni vi sono episodi di crescita dell'ineguaglianza dei redditi, il più importante dei quali è coinciso con la severa crisi economica dei primi anni novanta, non si osserva tuttavia, una fase prolungata di aumento dell'ineguaglianza. Occorre sottolineare che, la sostanziale stabilità, soprattutto nell'ultimo ventennio, delle misure sintetiche I

¹La serie storica 1987 – 2010 nella definizione della variabile reddito familiare disponibile netto include anche i redditi da capitale finanziario, mentre i proventi da capitale finanziario sono esclusi nella serie 1977 – 2010.

e G di ineguaglianza, non esclude cambiamenti nell'allocazione delle risorse ovvero movimenti redistributivi orizzontali che hanno modificato le posizioni relative delle classi sociali. Quindi, un ulteriore possibile aspetto da approfondire, avente finalità inerenti le analisi delle dinamiche temporali dell'ineguaglianza, potrebbe essere quello di indagare più a fondo i cambiamenti che hanno interessato la struttura della società italiana.

Le analisi empiriche hanno altresì mostrato come per i pesi campionari, le differenze tra gli andamenti temporali degli indici I e G calcolati sui RF e sui RFP tendono a sovrapporsi con qualche lieve eccezione. Al contrario, i RFE ottenuti mediante la scala OCSE modificata, e caratterizzati da una minore ineguaglianza rispetto ai RF, hanno consentito l'analisi della dinamica dell'incidenza della povertà: in particolare si è registrato un netto e brusco aumento della quota di famiglie definite povere (in senso relativo) passando da poco più del 10% del 1991 al 14% del 1993 con una soglia di povertà fissata al 50% del reddito mediano equivalente, e dal 18% per il 1991 al 21% nel 1993, nel caso si fissi la soglia al 60%.

Inoltre, si è mostrato che il primo punto $(p', I_{(p')})$ di intersezione fra la curva $I_{(p)}$ e la retta parallela all'asse delle ascisse con ordinata pari ad I può essere sfruttato per lo studio della povertà. In effetti, per il caso italiano, il rapporto tra $x_{(p')}$ e la mediana della distribuzione dei redditi familiari equivalenti, ha assunto valori oscillanti attorno a 0,67: $x_{(p')}$ è il valore del reddito familiare in corrispondenza di p' . Dunque, la frequenza cumulata relativa p' può essere caratterizzata quale indice di diffusione della povertà relativa.

Nella seconda parte, tenendo conto della recente scomposizione per fonti dell'indice I di Zenga, (Zenga *et altri*, 2012), si sono valutati i contributi assoluti e relativi all'ineguaglianza, analizzando la serie storica 1987 – 2010 dei redditi familiari disponibili netti. Se da un lato gli apporti relativi alla ineguaglianza del reddito da lavoro dipendente mostrano nell'arco temporale considerato una tendenza alla diminuzione, a fronte dell'incremento delle pensioni e dei trasferimenti netti, i contributi del reddito da lavoro autonomo e da capitale si attestano su valori medio alti e non mostrano tendenze nel lungo periodo. Inoltre, il confronto dei contributi relativi $\beta(X_j)$ alla ineguaglianza della variabile Y ed i rispettivi contributi ${}_j\gamma = \beta(\hat{X}_j)$ alla media totale, ha consentito infine, di mostrare come le pensioni ed i trasferimenti netti riducono l'ineguaglianza mentre le restanti fonti incrementano l'ineguaglianza anche se in misura diversa tra loro. Una possibile futura applicazione potrebbe

essere quella di estendere lo studio empirico ai Paesi europei ed analizzarne le principali caratteristiche in termini di ineguaglianza. In particolare, appare interessante, capire se p' può essere identificato come un indice di diffusione della povertà non solo per l'Italia ma anche per altri Paesi europei.

**Appendice: Tabelle elaborazioni serie storica
1977 - 2010**

Tabella 1: Indici di ineguaglianza I di Zenga e G di Gini, indici di posizione: mediana, media aritmetica e loro rapporto, coefficiente di variazione calcolati in riferimento ai RF, RFP, RFE. **Archivio Storico Banca d'Italia. Indagini 1977 - 2010. I Redditi familiari non comprendono i redditi da capitale finanziario**

Anno	I			G			Mediana			Media			Mediana/Media			CV		
	RF	RFP	RFE	RF	RFP	RFE	RF	RFP	RFE	RF	RFP	RFE	RF	RFP	RFE	RF	RFP	RFE
1977	0.7003	0.7052	0.6583	0.3552	0.3591	0.3225	2856	2794	1405	3480	3407	1691	0.821	0.820	0.831	0.746	0.752	0.687
1978	0.6904	0.6964	0.6529	0.3469	0.3519	0.3170	3615	3502	1782	4334	4227	2080	0.834	0.828	0.857	0.772	0.793	0.732
1979	0.7175	0.7176	0.6630	0.3720	0.3719	0.3238	4132	4054	2148	5132	4966	2505	0.805	0.816	0.858	0.827	0.836	0.746
1980	0.6946	0.6947	0.6488	0.3530	0.3527	0.3170	5192	5134	2582	6336	6194	3081	0.819	0.829	0.838	0.988	0.879	0.856
1981	0.6601	0.6703	0.6219	0.3222	0.3301	0.2946	5867	5919	2874	6913	6961	3322	0.849	0.850	0.865	0.697	0.732	0.648
1982	0.6531	0.6546	0.6021	0.3177	0.3178	0.2818	7468	7413	3673	8689	8570	4167	0.859	0.865	0.881	0.695	0.656	0.648
1983	0.6708	0.6672	0.6211	0.3328	0.3281	0.2943	8315	8111	4181	10057	9691	4837	0.827	0.837	0.864	0.726	0.678	0.639
1984	0.6694	0.6710	0.6239	0.3297	0.3307	0.2965	9180	9296	4673	10865	10983	5430	0.845	0.846	0.861	0.695	0.680	0.625
1986	0.6796	0.6768	0.6409	0.3386	0.3366	0.3064	10226	9841	5367	12167	11822	6150	0.840	0.832	0.873	0.880	0.827	0.781
1987	0.7035	0.6915	0.6790	0.3608	0.3481	0.3377	12395	11362	6438	15419	13784	7734	0.804	0.824	0.832	0.752	0.817	0.738
1989	0.6561	0.6554	0.6168	0.3210	0.3196	0.2912	14018	14254	7421	16526	16576	8447	0.848	0.860	0.879	0.646	0.675	0.687
1991	0.6501	0.6526	0.6158	0.3148	0.3156	0.2874	15804	16010	8392	18428	18447	9390	0.858	0.868	0.894	0.624	0.666	0.677
1993	0.6973	0.6997	0.6678	0.3503	0.3525	0.3231	16527	16320	9038	19944	19628	10346	0.829	0.831	0.874	0.700	0.715	0.706
1995	0.6968	0.7016	0.6699	0.3524	0.3570	0.3269	18179	17800	9932	21859	21367	11403	0.832	0.833	0.871	0.762	0.752	0.724
1998	0.6975	0.7105	0.6710	0.3488	0.3615	0.3235	21123	19470	11477	24763	23545	12953	0.853	0.827	0.886	0.751	0.767	0.766
2000	0.7024	0.6990	0.6732	0.3538	0.3521	0.3251	22001	21175	12601	26450	25386	14335	0.832	0.834	0.879	0.758	0.740	0.711
2002	0.7000	0.6993	0.6608	0.3544	0.3536	0.3173	22962	22650	13680	27583	27225	15522	0.832	0.832	0.881	0.763	0.744	0.692
2004	0.6924	0.6911	0.6625	0.3537	0.3519	0.3239	24200	23900	14714	29837	29544	17027	0.811	0.809	0.864	0.897	0.864	0.869
2006	0.6833	0.6869	0.6484	0.3424	0.3459	0.3096	26198	26040	16190	31727	31702	18396	0.826	0.821	0.880	0.839	0.888	0.792
2008	0.6764	0.6866	0.6482	0.3363	0.3461	0.3080	26800	26500	16709	32249	32235	18779	0.831	0.822	0.890	0.746	0.778	0.696
2010	0.6892	0.6929	0.6701	0.3455	0.3489	0.3232	27800	27300	17050	33317	33097	19335	0.834	0.825	0.882	0.729	0.721	0.691

Tabella 2: Indice sintetico di ineguaglianza I di Zenga, p' e p'' frequenze cumulate relative in corrispondenza delle intersezioni della curva $I_{(p)}$ con la retta parallela all'asse delle ascisse passante per il punto di ordinata I , valori dell'indice I in corrispondenza di $p = 0.5$ ossia della mediana, di p_{mean} ossia frequenza relativa cumulata in corrispondenza della media aritmetica, di p_{min} ossia frequenza cumulata relativa in corrispondenza del minimo valore assunto da I . **Archivio Storico Banca d'Italia. Indagini 1977-2010. Redditi familiari disponibili netti esclusi redditi da capitale finanziario**

Anno	I			$p'; p''$			$I_{p=0.5}$			$p_{mean}; I_{p_{mean}}$			$p_{min}; I_{p_{min}}$		
	RF	RFP	RFE	RF	RFP	RFE	RF	RFP	RFE	RF	RFP	RFE	RF	RFP	RFE
1977	0.7003	0.7052	0.6583	0.2779; 0.9256	0.2813; 0.9282	0.2289; 0.8945	0.6532	0.6582	0.6106	0.6165; 0.6451	0.6191; 0.6492	0.6192; 0.6081	0.6552; 0.6444	0.6557; 0.6482	0.6104; 0.6080
1978	0.6904	0.6964	0.6529	0.2562; 0.9067	0.2606; 0.9092	0.2238; 0.8898	0.6409	0.6466	0.6012	0.6107; 0.6333	0.6153; 0.6388	0.6192; 0.5969	0.6567; 0.6321	0.6718; 0.6377	0.5962; 0.5966
1979	0.7175	0.7176	0.6630	0.2737; 0.9130	0.2763; 0.9125	0.2335; 0.8913	0.6700	0.6691	0.6101	0.6175; 0.6604	0.6210; 0.6602	0.6057; 0.6040	0.6559; 0.6595	0.6619; 0.6592	0.6400; 0.6035
1980	0.6946	0.6947	0.6488	0.2456; 0.8916	0.2436; 0.8962	0.2012; 0.8743	0.6443	0.6448	0.6006	0.6178; 0.6377	0.6113; 0.6378	0.6184; 0.5987	0.6483; 0.6371	0.6589; 0.6369	0.5858; 0.5984
1981	0.6601	0.6703	0.6219	0.2378; 0.9027	0.2457; 0.9019	0.2052; 0.8746	0.6106	0.6183	0.5713	0.6148; 0.6059	0.6169; 0.6132	0.6123; 0.5704	0.6065; 0.6059	0.6155; 0.6132	0.5610; 0.5700
1982	0.6531	0.6546	0.6021	0.2463; 0.9103	0.2600; 0.9249	0.2035; 0.8732	0.6089	0.6107	0.5573	0.6030; 0.6019	0.6032; 0.6032	0.6051; 0.5551	0.6385; 0.6014	0.6536; 0.6023	0.5804; 0.5549
1983	0.6708	0.6672	0.6211	0.2386; 0.9055	0.2577; 0.9213	0.2087; 0.8815	0.6254	0.6212	0.5740	0.6165; 0.6209	0.6098; 0.6157	0.6079; 0.5723	0.6282; 0.6209	0.6450; 0.6152	0.5793; 0.5722
1984	0.6694	0.6710	0.6239	0.2581; 0.9128	0.2626; 0.9157	0.2063; 0.8844	0.6233	0.6259	0.5779	0.6038; 0.6162	0.5993; 0.6180	0.6067; 0.5753	0.6575; 0.6149	0.6750; 0.6157	0.6008; 0.5753
1986	0.6796	0.6768	0.6409	0.2508; 0.9085	0.2555; 0.9123	0.2340; 0.8965	0.6325	0.6307	0.5897	0.6101; 0.6262	0.6122; 0.6248	0.5979; 0.5841	0.6538; 0.6254	0.6570; 0.6241	0.6336; 0.5836
1987	0.7035	0.6915	0.6790	0.2462; 0.9109	0.2660; 0.9232	0.2398; 0.9024	0.6607	0.6465	0.6297	0.6199; 0.6527	0.6104; 0.6393	0.6153; 0.6241	0.6545; 0.6522	0.6773; 0.6374	0.6244; 0.6241
1989	0.6561	0.6554	0.6168	0.2546; 0.9166	0.2644; 0.9214	0.2300; 0.8953	0.6146	0.6132	0.5728	0.6029; 0.6078	0.5995; 0.6057	0.5913; 0.5677	0.6749; 0.6066	0.6804; 0.6038	0.6289; 0.5671
1991	0.6501	0.6526	0.6158	0.2698; 0.9277	0.2887; 0.9380	0.2493; 0.9125	0.6099	0.6132	0.5706	0.5970; 0.6026	0.5897; 0.6039	0.5852; 0.5638	0.6948; 0.5995	0.6909; 0.5986	0.6563; 0.5620
1993	0.6973	0.6997	0.6678	0.2879; 0.9398	0.2916; 0.9441	0.2659; 0.9274	0.6531	0.6565	0.6151	0.6051; 0.6428	0.6052; 0.6463	0.5918; 0.6055	0.7195; 0.6385	0.7183; 0.6407	0.6635; 0.6028
1995	0.6968	0.7016	0.6699	0.2741; 0.9290	0.2907; 0.9312	0.2643; 0.9187	0.6502	0.6570	0.6145	0.6078; 0.6406	0.6050; 0.6465	0.5987; 0.6054	0.6789; 0.6386	0.6971; 0.6436	0.6532; 0.6040
1998	0.6975	0.7105	0.6710	0.2820; 0.9356	0.2872; 0.9340	0.2657; 0.9215	0.6455	0.6617	0.6087	0.6006; 0.6343	0.6055; 0.6508	0.5920; 0.5987	0.6860; 0.6309	0.6956; 0.6471	0.6600; 0.5964
2000	0.7024	0.6990	0.6732	0.2763; 0.9306	0.2760; 0.9291	0.2675; 0.9224	0.6530	0.6512	0.6135	0.6098; 0.6432	0.6082; 0.6418	0.5909; 0.6036	0.6939; 0.6405	0.6803; 0.6397	0.6515; 0.6014
2002	0.7000	0.6993	0.6608	0.2669; 0.9234	0.2651; 0.9242	0.2492; 0.9097	0.6538	0.6540	0.6017	0.6132; 0.6443	0.6117; 0.6440	0.6027; 0.5936	0.6753; 0.6427	0.6717; 0.6419	0.6237; 0.5933
2004	0.6924	0.6911	0.6625	0.2355; 0.8965	0.2319; 0.8984	0.2397; 0.8876	0.6479	0.6464	0.6043	0.6221; 0.6425	0.6210; 0.6418	0.6136; 0.5991	0.6345; 0.6424	0.6381; 0.6417	0.6065; 0.5990
2006	0.6833	0.6869	0.6484	0.2414; 0.9046	0.2426; 0.9004	0.2482; 0.8992	0.6366	0.6401	0.5903	0.6126; 0.6299	0.6160; 0.6334	0.6019; 0.5838	0.6530; 0.6293	0.6562; 0.6328	0.6230; 0.5835
2008	0.6764	0.6866	0.6482	0.2440; 0.9086	0.2534; 0.9095	0.2571; 0.9095	0.6297	0.6421	0.5911	0.6184; 0.6237	0.6239; 0.6362	0.5911; 0.5829	0.6299; 0.6237	0.6524; 0.6362	0.6346; 0.5819
2010	0.6892	0.6929	0.6701	0.2564; 0.9164	0.2559; 0.9168	0.2712; 0.9205	0.6421	0.6458	0.6119	0.6125; 0.6338	0.6164; 0.6374	0.5893; 0.6014	0.6522; 0.6332	0.6507; 0.6370	0.6638; 0.5985

Tabella 3: Soglie di povertà, p''' e $I_{(p''')}$ in corrispondenza del 50% e del 60% di ξ , frazione di ξ in corrispondenza di p' . **Dati: indagini 1977-2010. Redditi familiari disponibili netti esclusi redditi da capitale finanziario resi equivalenti mediante la scala OCSE modificata**

Anno	I	$p'; p''$	soglia di povertà		$p'''; I_{(p''')}$		$\% \cdot \xi$
	RFE	RFE	50%· ξ	60%· ξ	50%· ξ	60%· ξ	$p^* = p'$
1977	0.6583	0.2289; 0.8945	700	840	0.1045; 0.7218	0.1743; 0.6805	0.67
1978	0.6529	0.2238; 0.8898	891	1069	0.1104; 0.7142	0.1782; 0.6721	0.66
1979	0.6630	0.2335; 0.8913	1073	1288	0.1164; 0.7283	0.1824; 0.6855	0.66
1980	0.6488	0.2012; 0.8743	1289	1547	0.0911; 0.7081	0.1654; 0.6627	0.64
1981	0.6219	0.2052; 0.8746	1436	1723	0.0861; 0.6920	0.1506; 0.6469	0.67
1982	0.6021	0.2035; 0.8732	1835	2202	0.0791; 0.6653	0.1479; 0.6224	0.65
1983	0.6211	0.2087; 0.8815	2090	2508	0.0860; 0.6855	0.1604; 0.6400	0.67
1984	0.6239	0.2063; 0.8844	2335	2802	0.0863; 0.6914	0.1554; 0.6447	0.66
1986	0.6409	0.2340; 0.8965	2683	3219	0.1061; 0.7083	0.1808; 0.6615	0.66
1987	0.6790	0.2398; 0.9024	3217	3860	0.1274; 0.7312	0.1985; 0.6944	0.65
1989	0.6168	0.2300; 0.8953	3712	4454	0.0905; 0.6815	0.1700; 0.6371	0.67
1991	0.6158	0.2493; 0.9125	4192	5030	0.1045; 0.6860	0.1742; 0.6439	0.69
1993	0.6678	0.2659; 0.9274	4514	5417	0.1360; 0.7369	0.2041; 0.6942	0.68
1995	0.6699	0.2643; 0.9187	4966	5959	0.1396; 0.7365	0.2011; 0.6985	0.69
1998	0.6710	0.2657; 0.9215	5736	6883	0.1351; 0.7513	0.2004; 0.7035	0.69
2000	0.6732	0.2675; 0.9224	6300	7560	0.1391; 0.7458	0.2031; 0.7030	0.68
2002	0.6608	0.2492; 0.9097	6838	8206	0.1280; 0.7301	0.1940; 0.6863	0.67
2004	0.6625	0.2397; 0.8876	7358	8829	0.1288; 0.7178	0.1919; 0.6827	0.66
2006	0.6484	0.2482; 0.8992	8095	9714	0.1251; 0.7114	0.1906; 0.6732	0.68
2008	0.6482	0.2571; 0.9095	8350	10020	0.1243; 0.7168	0.1991; 0.6717	0.68
2010	0.6701	0.2712; 0.9205	8525	10230	0.1440; 0.7367	0.2091; 0.6976	0.69

Tabella 4: *Decomposizione dei Contributi assoluti e relativi alla disegualianza di Y^* . Archivio Storico Banca d'Italia. Indagini 1987-2010. Redditi familiari disponibili netti inclusi redditi da capitale finanziario*

	1987	1989	1991	1993	1995	1998	2000	2002	2004	2006	2008	2010
$B^*(X_{(1)})$	0.388	0.393	0.381	0.372	0.356	0.351	0.351	0.344	0.341	0.345	0.342	0.331
$B^*(X_1)$	0.264	0.270	0.257	0.268	0.251	0.238	0.241	0.234	0.225	0.227	0.218	0.210
$B^*(R_1)$	0.124	0.122	0.123	0.104	0.105	0.113	0.110	0.111	0.116	0.118	0.124	0.121
$\beta^*(X_{(1)})$	0.411	0.420	0.408	0.398	0.381	0.376	0.376	0.368	0.364	0.370	0.368	0.356
$\beta^*(X_1)$	0.280	0.289	0.276	0.287	0.268	0.255	0.258	0.250	0.240	0.243	0.234	0.226
$\beta^*(R_1)$	0.131	0.131	0.132	0.111	0.113	0.121	0.118	0.118	0.124	0.127	0.134	0.130
$B^*(X_{(2)})$	0.152	0.170	0.194	0.214	0.222	0.213	0.217	0.234	0.236	0.244	0.270	0.264
$B^*(X_2)$	-0.007	-0.003	0.007	0.049	0.062	0.060	0.056	0.061	0.059	0.065	0.094	0.091
$B^*(R_2)$	0.159	0.173	0.187	0.165	0.160	0.153	0.161	0.173	0.177	0.179	0.176	0.173
$\beta^*(X_{(2)})$	0.161	0.182	0.208	0.229	0.238	0.228	0.232	0.250	0.253	0.262	0.291	0.284
$\beta^*(X_2)$	-0.007	-0.003	0.008	0.053	0.067	0.065	0.060	0.065	0.063	0.070	0.102	0.098
$\beta^*(R_2)$	0.168	0.185	0.200	0.176	0.172	0.164	0.172	0.184	0.189	0.192	0.189	0.186
$B^*(X_{(3)})$	0.260	0.214	0.196	0.152	0.160	0.174	0.181	0.185	0.193	0.176	0.146	0.152
$B^*(X_3)$	0.202	0.138	0.129	0.096	0.102	0.119	0.128	0.139	0.148	0.132	0.102	0.107
$B^*(R_3)$	0.058	0.075	0.067	0.056	0.058	0.056	0.053	0.047	0.044	0.044	0.045	0.044
$\beta^*(X_{(3)})$	0.275	0.229	0.210	0.163	0.171	0.187	0.194	0.198	0.206	0.189	0.157	0.163
$\beta^*(X_3)$	0.214	0.148	0.139	0.103	0.109	0.127	0.137	0.148	0.158	0.141	0.109	0.115
$\beta^*(R_3)$	0.062	0.081	0.072	0.060	0.062	0.060	0.057	0.050	0.047	0.048	0.048	0.048
$B^*(X_{(4)})$	0.145	0.158	0.163	0.197	0.195	0.195	0.186	0.172	0.166	0.167	0.171	0.183
$B^*(X_4)$	0.105	0.115	0.120	0.156	0.153	0.152	0.143	0.127	0.120	0.122	0.127	0.140
$B^*(R_4)$	0.040	0.043	0.043	0.041	0.042	0.043	0.043	0.045	0.046	0.045	0.044	0.043
$\beta^*(X_{(4)})$	0.153	0.169	0.174	0.211	0.209	0.209	0.199	0.184	0.177	0.179	0.184	0.197
$\beta^*(X_4)$	0.111	0.123	0.129	0.167	0.164	0.163	0.153	0.135	0.129	0.131	0.136	0.151
$\beta^*(R_4)$	0.042	0.046	0.046	0.043	0.045	0.046	0.046	0.048	0.049	0.048	0.048	0.046

Bibliografia

- [1] Banca d'Italia, (1965-2010). *I bilanci delle famiglie italiane*. Supplementi al Bollettino Statistico - indagini campionarie, Anni dal 1965 al 2010.
- [2] Benini R., (1906), *Principi di Statistica Metodologica*. Utet, Torino.
- [3] Berti P., Rigo P., (1995), *A Note on Zenga Concentration Index*. Journal of the Italian Statistical Society, 4, 397-404.
- [4] Berti P., Rigo P., (2006), *Concentration Curve and Index, Zenga's*. In Kotz S. (ed.), *Encyclopedia of Statistical Sciences*. John Wiley & Sons, New York - London.
- [5] Bonferroni C., (1930), *Elementi di Statistica Generale*. Seeber, Firenze.
- [6] Brandolini, A., (1999), *The Distribution of Personal Income in Post-War Italy: Source Description, Data Quality, and the Time Pattern of Income Inequality*. Giornale degli Economisti e Annali di Economia, Vol.58, pp.183-239.
- [7] Brandolini, A., (2005), *La Diseguaglianza di reddito in Italia nell'ultimo decennio*. Stato e Mercato, n.74, pp.207-229.
- [8] Brandolini A., (2008), *Income Inequality in Italy: Facts and Measurement*. In Atti della XLIV Riunione Scientifica della SIS, Seconda Sessione Plenaria, 25-27 Giugno 2008, Università della Calabria.
- [9] Bresciani C. - Turrone, (1905), *Dell'Influenza delle Condizioni Economiche sulla Forma della Curva dei Redditi*. Giornale degli Economisti, XXXI, 115-138.
- [10] Bresciani C. - Turrone, (1910), *Di un Indice Misuratore della Diseguaglianza dei Redditi*. Studi in onore di B. Burgio, Palermo, 54-61.

- [11] Cantelli F.P., (1921), *Sulla Deduzione delle Leggi di Frequenza da Considerazioni di Probabilità*. *Metron*, 3, 83-91.
- [12] Dagum C., (1977), *A new Model of Personal Income Distribution: Specification and Estimation*. *Economie Appliquée*, 30, 413-436.
- [13] Dagum C., (1980), *The Generation and the Distribution of Income, the Lorenz Curve and the Gini Ratio*. *Economie Appliquée*, 33, 227-267.
- [14] Dagum C., (1990), *Generation and Properties of Income Distribution Function*. In: *Income and Wealth Distribution, Inequality and Poverty*, Dagum C. & Zenga M. (Eds.), Springer-Verlag, Berlin, 94-110.
- [15] Dalton H., (1920), *The Measurement of Inequality of Income*. *Economic Journal*, 30, 348-361.
- [16] Dancelli L., (1986), *Tendenza alla Massima ed alla Minima Concentrazione nel Modello di Distribuzione del Reddito Personale di Dagum*. *Scritti in onore di Francesco Brambilla - Ediz. Bocconi Comunicazione*, I, 259-267.
- [17] Dancelli L., (1989), *A Comparative Analysis between the $Z_{(p)}$ and $L_{(p)}$ Concentration Curves in the Dagum Model (Italian)*. *Statistica Applicata*, 1, 399-415.
- [18] Dancelli L., (1990), *On the Behaviour of the $Z_{(p)}$ concentration curve*. In Dagum C., Zenga M. (eds.), *Income and Wealth Distribution, Inequality and Poverty*. Springer-Verlag, New York, 111-127.
- [19] Edgeworth F.Y., (1898), *On the Representation of Statistics by Mathematical Formulae*. *Journal of the Royal Statistical Society*, 1, 670-700.
- [20] Frechet M., (1939), *Sur les Formules de Ripartition des Revenues*. *Revue de l'Institut International de Statistique*, 7, 32-38.
- [21] Frosini B. V., Montinaro M., Nicolini G., (2011), *Campionamenti da Popolazioni Finite - Metodi e Applicazioni*. Giappichelli Editore, Torino.
- [22] Gini C., (1910), *Indici di Concentrazione e di Dipendenza*. *Biblioteca dell'Economista*, V Serie, XX.

- [23] Gini C., (1914), *Sulla Misura della Concentrazione e della Variabilità dei Caratteri*. Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, LXXIII, parte seconda, 1201-1248.
- [24] Grassini L., (1987), *Osservazioni sul Contributo di A. Brunazzo*. In Zenga M. (ed.), *La Distribuzione Personale del Reddito: Problemi di formazione, di ripartizione e di misurazione*. Vita e Pensiero, Milano.
- [25] Greselin F., Pasquazzi L., Zitikis R., (2010), *Zenga's new index of economic inequality, its estimation, and analysis of incomes in Italy*. *Journal of Probability and Statistics*, 2010, 1-26.
- [26] Greselin F., Pasquazzi L., (2009), *Asymptotic confidence intervals for a new inequality measure*. *Communications in Statistics, Simulation and Computation*, 38(8), 1742-1756.
- [27] Greselin F., Puri M., Zitikis R., (2009), *L-functions, processes, and statistics in measuring economic inequality and actuarial risks*. *Statistics and its Interfaces*, 2(2), 227-245.
- [28] Kleiber C., (1996), *Dagum vs. Singh-Maddala Income Distributions*. *Economics Letters*, 53, 265-268.
- [29] Kleiber C., (1999), *On the Lorenz Order within Parametric Families of Income Distributions*. *Sankhya*, 61, 514-517.
- [30] Kleiber C., Kotz S., (2003), *Statistical Size Distributions in Economics and Actuarial Sciences*. *Wiley Series in Probability and Statistics*. John Wiley & Sons, New York - London.
- [31] Langel M., Tillé Y., (2012), *Inference by linearization for the Zenga inequality index: A comparison with the Gini index*. *Metrika*, 75(8), 1093-1110.
- [32] Lerman R., Yitzhaki S., (1984), *A note on the calculation and interpretation of the Gini index*. *Economics Letters*, 15, 363-368.
- [33] Lerman R., Yitzhaki S., (1985), *Income inequality effects by income source: a new approach and applications to the United States*. *The Review of Economics and Statistics*, 67, 151-156.

- [34] Lorenz M., (1905), *Methods of Measuring the Concentration of Wealth*. Publications of the American Statistical Association, 9, 209-219.
- [35] Maffenini W., Poliscchio M., (2010), *How potential is the $I_{(p)}$ inequality curve in the analysis of empirical distributions*. Technical Report, n. 186. Dipartimento di Metodi Quantitativi per le Scienze Economiche ed Aziendali, Università degli Studi di Milano-Bicocca.
- [36] Mandelbrot B., (1960), *The Pareto-Levy Law and the Distribution of Income*. International Economic Review, 1, 79-106.
- [37] Mandelbrot B., (1963), *New Methods in Statistical Economics*. Journal of Political Economy, LXXI, 421-440.
- [38] March L., (1898), *Quelques Exemples de Distribution de Salaires*. Journal de la Societè Statistique de Paris, 193-206, 241-248.
- [39] Mortara G., (1911), *Note di Economia Induttiva (Sulla Distribuzione dei Redditi)*. Giornale degli Economisti, XLII, 455-471.
- [40] Pareto V., (1895), *La legge della domanda*. Giornale degli Economisti, VI, 59-68.
- [41] Pietra G., (1915), *Delle Relazioni fra Indici di Variabilità note I e II*. Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, LXXIV, parte seconda, 775-804.
- [42] Pirrotta R.A., (1985), *La Concentrazione e distribuzione dei redditi in Italia risultante dai dati dell'indagine campionaria sui bilanci delle famiglie condotta dalla Banca d'Italia*. Rivista di Statistica Applicata, Vol.18, n.3.
- [43] Poliscchio M., (1993a), *The Global Concentration Measure ζ and the Principle of Transfers: An Empirical Analysis (Italian)*. Giornale degli Economisti e Annali di Economia, 52, 291-308.
- [44] Poliscchio M., (1993b), *Sugli Ordinamenti Parziali Basati sulla Curva di Lorenz e sulla Misura Puntuale $Z_{(p)}$* . Quaderni di Statistica e Matematica Applicata alle Scienze Economico Sociali, 15, 63-86.
- [45] Poliscchio M., (2008a), *The Continuous Random Variable with Uniform Point Inequality Measure $I(p)$* . Statistica & Applicazioni, VI, n. 2, 137-151.

- [46] Poliscichio M., (2008b), *The discrete variable with a given shape of the point inequality index $I_{(p)}$* . Technical Report, n. 154. Dipartimento di Metodi Quantitativi per le Scienze Economiche ed Aziendali, Università degli Studi di Milano-Bicocca.
- [47] Poliscichio M., Porro F., (2008a), *The $I_{(p)}$ Curve for Some Classical Income Models*, Rapporto di Ricerca n.159 del Dipartimento di Metodi Quantitativi per le Scienze Economiche ed Aziendali. Università degli Studi di Milano-Bicocca.
- [48] Poliscichio M., Porro F., (2011b), *A comparison between Lorenz $L_{(p)}$ curve and Zenga $I_{(p)}$ curve*. Statistica applicata. 21(3-4), 289-301.
- [49] Pollastri A., (1987), *The Concentration Curves $L_{(p)}$ and $Z_{(p)}$ in the Generalized Lognormal Distribution*. Giornale degli Economisti e Annali di Economia, 46, 639-663.
- [50] Porro F., (2008), *Equivalence Between Partial Order Based on Curve $L_{(p)}$ and Partial Order Based on Curve $I_{(p)}$* , Atti della XLIV Riunione Scientifica della Società Italiana di Statistica. CLEUP, Padova.
- [51] Porro F., (2011), *The distribution model with linear inequality curve $I_{(p)}$* . Statistica & Applicazioni, IX(1), 47-61.
- [52] Pyatt, G., (1976), *On the Interpretation and Disaggregation of Gini Coefficients*. The Economic Journal, Vol.86, n.342.
- [53] Pyatt, G., Chau-nan C., Fei J., (1980), *The Distribution of Income by Factor Components*. The Quarterly Journal of Economics, Vol.95, n.3.
- [54] Quintano C., (1994), *Scritti di Statistica Economica*. Istituto di Statistica e Matematica (I.U.N.), Rocco Curto Editore, Napoli.
- [55] Quintano C., Castellano R., Regoli A., (2009), *Evolution and Decomposition of Income Inequality in Italy, 1991-2004*. Statistical methods and Applications.
- [56] Radaelli P., Zenga M., (2005), *On the decomposition of the Gini mean difference and concentration ratio*. Statistica & Applicazioni, III(2), 5-24.

- [57] Radaelli P. (2006), *Decomposition of Zenga's inequality index I*. Technical Report, n.116, Dipartimento di Metodi Quantitativi per le Scienze Economiche ed Aziendali, Università degli Studi di Milano-Bicocca.
- [58] Radaelli P., (2008), *A subgroups decomposition of Zenga's uniformity and inequality indexes*. *Statistica & Applicazioni*, VI(2), 117-136.
- [59] Radaelli P., (2010), *On decomposition by subgroups of the Gini index and Zenga's uniformity and inequality indexes*. *International Statistical Review*, 78(1), 81-101.
- [60] Rao V. (1969), *Two decomposition of concentration ratio*. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A*, 132, 418-425.
- [61] Salvaterra T., (1987), *Analisi Comparata dei Procedimenti di Calcolo dei Rapporti di Concentrazione $Z_{(p)}$ e dell'Indice di Concentrazione ζ di Zenga*. In Zenga M. (ed.), *La Distribuzione Personale del Reddito: Problemi di formazione, di ripartizione e di misurazione*. Vita e Pensiero, Milano.
- [62] Salvaterra T., (1990), *Comparison Among Concentration Curves and Index in some Empirical Distributions*. In Dagum C., Zenga M. (eds.), *Income and Wealth Distribution, Inequality and Poverty*. Springer-Verlag, New York, 111-127.
- [63] Sen A.K., (1973), *On Economic Inequality*. Oxford University Press, Oxford.
- [64] Sen A.K., (1982), *Choice, Welfare and Measurement*. Basil Blackwell, Oxford.
- [65] Silber J., (1989), *Factor Components, Population Subgroups and the Computation of the Gini Index of Inequality*. *The Review of Economics and Statistics*, Vol.71, n.1.
- [66] Silber J., (1993), *Inequality Decomposition by Income Source: A Note*. *The Review of Economics and Statistics*, Vol.75, n.3.
- [67] Silber J., (1999), *Handbook of Income Inequality Measurement*. Boston: Kluwer Academic.
- [68] Tarsitano A., (1989), *The Bonferroni index income inequality*. In C. Dagum and M. Zenga (Eds.), *Income and Wealth Distribution, Inequality and Poverty*. *Studies in Contemporary Economics* Springer-Verlag, Berlin.

- [69] Zenga Ma., (2008), *An extension of the inequality I and $I_{(p)}$ curve to non economic variables*. In Atti della XLIV Riunione Scientifica della SIS, Sessioni spontanee auto-organizzate, contributi su CD. 25-27 Giugno 2008, Università della Calabria.
- [70] Zenga M., (1984), *Proposta per un Indice di Concentrazione Basato sui Rapporti tra Quantili di Popolazione e Quantili di Reddito*. Giornale degli Economisti e Annali di Economia, 43, 301-326.
- [71] Zenga M., (1990), *Concentration curves and concentration indexes derived from them*. In: Income and Wealth Distribution, Inequality and Poverty, Dagum C. & Zenga M. (Eds.), Springer-Verlag, Berlin, 94-110.
- [72] Zenga M., (1991a), *Impiego delle Tabelle di Cograduazione per la Determinazione dell'Indice Puntuale $Z_{(p)}$* . Statistica Applicata, 3, 7-15.
- [73] Zenga M., (1991b), *L'indice $Z_{(p)}$ come misura della Concentrazione Locale*. Giornale degli Economisti e Annali di Economia, 50, 151-161.
- [74] Zenga M., (2007), *Inequality Curve and Inequality Index Based on the Ratios Between Lower and Upper Arithmetic Means*. Statistica & Applicazioni, Vol.V, n.1, 3-27.
- [75] Zenga M.M., Radaelli P., Zenga Ma., (2012), *Decomposition of Zenga's inequality index by sources*. Statistica & Applicazioni, Vol.X, n.1, 3-34.