Atti del X Convegno Nazionale
di Didattica della Fisica e della Matematica
DI.FI.MA. 2021

Apprendimento laboratoriale in Matematica e Fisica in presenza e a distanza

Torino, 11-12-13 ottobre 2021 - online

2001-2021
Il convegno del ventennale

A cura di:
Raffaella Bonino
Daniela Marocchi
Marta Rinaudo
Marina Serio

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TORINO

Apprendimento laboratoriale in Matematica e Fisica in presenza e a distanza
Atti del X Convegno Nazionale di Didattica della Fisica e della Matematica, DI.FI.MA. 2021
A cura di R. Bonino, D. Marocchi, M. Rinaudo, M. Serio

Responsabile del convegno: Ornella Robutti
Responsabili scientifici: Giulia Bini, Alessio Drivet, Matteo Leone, Tommaso Marino, Daniela Marocchi, Ornella Robutti, Cristina Sabena, Ada Sargenti, Marina Serio, Germana Trinchero

Esperti Tecnici : Tiziana Armano e Filippo Cosma Liardi

Coordinamento rapporti con le scuole : Daniela Truffo (Città Metropolitana di Torino, CE.SE.DI)

Collane@unito.it
Università degli Studi di Torino
ISBN: 9788875902292

Disegno grafico: Maria Grazia Imarisio
Immagine di copertina: rielaborazione grafica di Elisa Gentile*,* collage di Marina Serio

GIOCHI DI CRITTOGRAFIA ELEMENTARE PER STUDENTI DI SCUOLA PRIMARIA

Marina Cazzola,Valentina Grazian
Università degli Studi di Milano - Bicocca
valentina.grazian@unimib.it

Abstract
In questo articolo descriviamo una serie di attività-gioco riguardanti la crittografia elementare, sfruttando un ambiente di gioco matematico web “pronto all’uso” da noi elaborato su WIMS. Nello specifico, proponiamo problemi di codifica e decodifica di messaggi segreti, prendendo ispirazione dal Codice di Cesare, e un gioco ispirato a tecniche di crittografia moderne, quali il codice a correzione di errore di Hamming, presentato come un gioco di magia. Inoltre, condividiamo i risultati della somministrazione delle attività sopra descritte a quattro classi di scuola primaria (due terze e due quarte).

Parole-chiave
Matematica, giochi interattivi, giochi educativi, game-based learning, software per l’apprendimento.

COINVOLGERE GLI STUDENTI ATTRAVERSO IL GIOCO

Partiamo dal presupposto che la risoluzione di problemi *à la* Polya (1980) rappresenti un passo cruciale per una reale comprensione della matematica. L’apprendimento risulta efficace solo se gli studenti “condividono una parte ragionevole del lavoro” (Polya, 1945). In questa visione, metodologie didattiche attive quali il Problem-Based Learning (PBL, Savery, 2006) sono particolarmente indicate sia per promuovere una comprensione profonda di fatti e regole matematiche, che per spingere gli studenti ad acquisire competenze fondamentali quali il pensiero critico e l’autoregolazione. Nel progettare laboratori di tipo PBL, il gioco può rappresentare il punto di partenza. In questo senso, l’utilizzo dei giochi nell’insegnamento (Game-Based Learning - GBL) è uno stratagemma chiave per coinvolgere gli studenti, in particolare nella scuola primaria, in attività matematiche. Il gioco diventa il problema che deve essere risolto e come tale può coinvolgere, migliorare l’approccio degli alunni alla matematica, motivare e stimolare il ragionamento complesso. Nonostante la ricerca documenti l’importanza di questi obiettivi nella progettazione didattica e l’efficacia dell’utilizzo dei giochi, che rendono l’apprendimento attivo e pongono lo studente al centro (Divjak & Tomić, 2021), ci rammarica constatare che tali metodologie non sono diffuse nella pratica didattica nelle scuole e la frase “a scuola non si viene per giocare!” purtroppo non è rara. Gli insegnanti troppo spesso continuano ad affidarsi a metodi “tradizionali”, e anche i docenti più volenterosi in varie occasioni esprimono lo sconforto nel non riuscire a progettare attività coinvolgenti per i loro alunni. Per questi motivi, riteniamo sia importante che la ricerca in didattica della matematica ponga tra i suoi obiettivi anche quello di aiutare gli insegnanti a pianificare le attività didattiche, producendo e discutendo esempi pronti all’uso. La proposta che presentiamo va proprio in questa direzione.

WIMS

Il software WIMS (WWW Interactive Multipurpose Server) è un sistema molto flessibile che permette la creazione di una grande varietà di *learning objects* con correzione automatica. È stato sviluppato da Xiao Gang e reso pubblico nel 1998 (Xiao, 1999). Una descrizione dettagliata di WIMS è disponibile in (Cazzola, Lemaire & Perrin-Riou, 2020).
Per gli scopi di questo lavoro, si può pensare a WIMS come ad “una rete di server che condividono risorse interattive su vari livelli riguardanti diversi argomenti” (Cazzola, Lemaire & Perrin-Riou, 2020).

Negli ultimi anni WIMS ha incluso sempre più moduli rivolti agli studenti della scuola primaria, ma talvolta la complessità della sua struttura può rendere difficile l'accesso ai materiali adatti alle proprie esigenze. Possono allora essere d'aiuto i documenti presenti su WIMS che costituiscono percorsi all'interno dell'immensa quantità di attività effettivamente disponibili. La proposta che descriviamo parte proprio da un documento WIMS (Cazzola, 2021a), che è liberamente accessibile a partire dall'indirizzo https://wims.matapp.unimib.it/wims/wims.cgi?module=E4/number/doccrypto.it. Tale documento, che connette vari moduli, alcuni dei quali sviluppati specificatamente per questo progetto, può essere utilizzato dal docente per organizzare l'attività, eventualmente modificandolo per adattarlo alle specificità della propria classe, ma può essere anche esplorato autonomamente dagli alunni.

PERCHÉ LA CRITTOGRAFIA?

La Crittografia non è un argomento tipico per la scuola primaria, ma crediamo che esso possa essere un potente alleato dell'insegnante. Per prima cosa, gli argomenti coinvolti sono sfidanti e utili a catturare l'attenzione degli studenti, dal momento che sono collegabili facilmente a problemi reali. In secondo luogo, la Crittografia consente di creare collegamenti con altre discipline, quali la storia (dai metodi antichi di cifratura e decifratura di codici segreti fino al suo utilizzo durante la Seconda Guerra Mondiale), la letteratura (utilizzando testi famosi come esempi di cifratura e decifratura) e l'educazione civica (ad esempio ragionando sulle frodi digitali e sulla necessità di limitare la condivisione di dati personali). Inoltre, molti problemi di crittografia possono essere presentati nella forma di gioco e si prestano quindi per la progettazione di attività di tipo PBL. Infine, la crittografia può fungere da ponte per introdurre argomenti profondi di matematica, aiutando gli studenti a riconoscere gli argomenti stessi come interessanti, utili e significativi. Tutte queste ragioni ci hanno portato a progettare l'attività descritta nella sezione seguente.

GIOCHI DI CRITTOGRAFIA ELEMENTARE

La nostra proposta riguarda il problema di cifrare e decifrare messaggi segreti e un gioco ispirato alla tecnica crittografica moderna del codice a correzione d'errore di Hamming (si veda Cameron, 1994, p. 271-273).

Cifrare e decifrare messaggi segreti.
La nostra proposta si articola in 5 passi.

Passo 1: Introdurre il problema. La capacità di inviare e ricevere messaggi segreti è un argomento che suscita sempre l'entusiasmo degli studenti. Iniziamo la nostra attività ricordando che una tale pratica ha una lunga storia ed era utilizzata anche nell'antica Roma per le comunicazioni in battaglia; questo approccio non solo cattura l'attenzione degli alunni, ma consente connessioni multidisciplinari.

Passo 2: Cifrare. A questo punto possiamo presentare il Codice di Cesare. L'idea è quella di fissare una chiave k e di muovere in avanti di k posti ogni lettera dell'alfabeto utilizzato. Ad esempio, se utilizziamo l'alfabeto inglese (che è composto da 26 lettere) e scegliamo la chiave $k = 2$, allora la lettera "A" diventa "C", la lettera "B" diventa "D" e così via (notare che la lettera "Y" diventa "A" e la lettera "Z" diventa "B"). Dunque, la parola "CASA" cifrata con chiave $k = 2$ diventa ECUC. Uno strumento efficace per visualizzare questo meccanismo è la doppia ruota, realizzabile con due dischi di carta concentrici con su scritto l'intero alfabeto utilizzato e fissati in modo che il più grande possa ruotare mentre il più piccolo è fermo. Sfruttando la doppia ruota e ruotando quella esterna in senso orario di 2 posti, possiamo vedere che la lettera esterna "C" è sopra alla lettera interna "E", la lettera esterna "A" è sopra alla lettera interna "C" e così via (si veda la Figura 1).

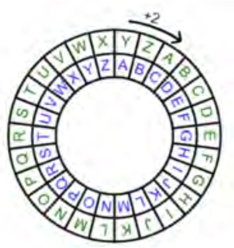

Figura 1. Utilizzare la doppia ruota per cifrare un messaggio con chiave $k = 2$

Il documento WIMS (Cazzola, 2021a) contiene una descrizione dettagliata e vari giochi sul metodo di cifratura con la doppia ruota. Questi giochi possono essere utilizzati indipendentemente dal documento, in quanto disponibili nel modulo WIMS (Cazzola, 2021b), e possono essere configurati dal docente con difficoltà crescente: prima la cifratura di una lettera, poi di una parola e infine di un'intera frase. Inoltre, ogni gioco ha due versioni: cifrare utilizzando la doppia ruota già ruotata del corretto numero di posti (come in Figura 1) o visualizzando unicamente la ruota interna (avvalendosi quindi solo dell'immaginazione per riconoscere lo spostamento delle lettere). Dal punto di vista didattico, riteniamo molto utile chiedere agli studenti di creare una versione cartacea della doppia ruota, da utilizzare in aggiunta a quella virtuale. In questo modo verranno coinvolte anche tecniche manipolative e gli alunni saranno ancora più coinvolti nell'attività.

Passo 3: Decifrare. La naturale continuazione di questo percorso riguarda l'abilità di decifrare i messaggi cifrati con il codice di Cesare. Se conosciamo la chiave k utilizzata per cifrare il messaggio, allora basterà ruotare la ruota esterna di k posti in senso antiorario (Figura 2).

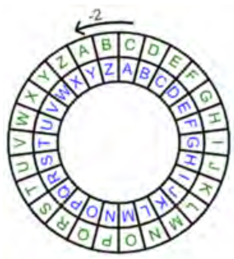

Figura 2. Utilizzare la doppia ruota per decifrare un messaggio con chiave $k = 2$

Ad esempio, è facile notare che la parola "IKQEQ" cifrata con chiave $k = 2$ corrisponde alla parola "GIOCO".

Come per il Passo 2, il documento WIMS (Cazzola, 2021a) contiene la spiegazione della tecnica di decifratura e vari giochi di crescente difficoltà, tutti disponibili nello stesso modulo (Cazzola, 2021b). L'attività risulta più efficace se la scoperta della regola di decifratura è lasciata agli studenti, a partire da quanto appreso sul processo di cifratura.

Passo 4: Scoprire la chiave. È giunto il momento di evidenziare l'importanza di conoscere la chiave di cifratura: senza di essa il compito di decifrare un messaggio segreto diventa molto più difficile (e ciò è un bene per le applicazioni quotidiane!). Proponiamo quindi dei giochi incentrati sulla scoperta della chiave di cifratura. Il modulo WIMS (Xiao, 1999) contiene dei lunghi testi cifrati (estratti da "Le Avventure di Pinocchio" di Carlo Collodi e "Alice nel Paese delle Meraviglie" di Lewis Carroll) e al giocatore è richiesto di determinare la chiave utilizzata. Ad esempio, viene richiesto di capire di quanti posti spostare in avanti ogni lettera per decifrare il testo:
"Paadgp vgpcsx gxhpit sprrped: bp a'dbxcd, xcktrt sx gxstgt, hx htcix egthd sp ipcid pbdgt etg fjtaa'xggtfjxtid phxctaad rwt, rdc jc qprxd, vax edgid kxp sx ctiid ap btip sx fjtaa'paigd dgtrrwxd. Edx sxhht pa qjgpiixcd: - Gxbdcip ejgt p rpkpaad, t cdc pktg epjgp. Fjta rxjrwxcd pktkp fjparwt vgxaad etg xa rped: bp xd vax wd stiid sjt epgdaxct ctvax dgtrrwx, t hetgd sx pktgad gthd bpchjtid t gpvxdctkdat."

Con un po' di lavoro, si può notare che la chiave corretta è $k = 11$ e il testo originale è

"Allora grandi risate daccapo: ma l'omino, invece di ridere, si sentì preso da tanto amore per quell'irrequieto asinello che, con un bacio, gli portò via di netto la metà di quell'altro orecchio. Poi disse al burattino: - Rimonta pure a cavallo, e non aver paura. Quel ciuchino aveva qualche grillo per il capo: ma io gli ho detto due paroline negli orecchi, e spero di averlo reso mansueto e ragionevole."

Ci sono varie strategie per determinare la chiave, come osservare le parole corte (la lettera "t" appare diverse volte isolata e ci sono buone probabilità che corrisponda alla lettera "e"), o considerare quanto spesso una lettera è ripetuta (analisi di frequenza) o analizzare la posizione delle lettere all'interno delle parole (ricordando che nella lingua italiana molte parole terminano in vocale). Nella nostra esperienza, gli studenti hanno trovato il problema molto intrigante e hanno proposto una grande quantità di strategie per indovinare la chiave corretta. Il modulo WIMS (Xiao, 1999) contiene vari testi cifrati con cui esercitarsi, distinti in due livelli: "Testo lungo (più facile)" e "Testo breve (più difficile)".

Passo 5: Conclusioni. Questa attività stimola gli studenti a ragionare sul fatto che lo scambio di messaggi segreti con amici/alleati prevede la conoscenza di un metodo di cifratura e decifratura e che quest'ultimo coinvolge una chiave. Tale chiave è fondamentale per il processo e quanto più difficile è da indovinare, tanto più il messaggio segreto sarà sicuro. Infine, è importante sottolineare che il codice di Cesare non è l'unico metodo di cifratura! Nel modulo WIMS (Xiao, 1999) si possono trovare altri giochi di decifratura in cui i testi proposti sono stati cifrati utilizzando tecniche diverse. Ad esempio, dato un testo cifrato, ai giocatori è richiesto di scoprire quali lettere devono essere scambiate a due a due per ottenere il messaggio originale.

Il gioco "7 domande e 1 menzogna". La seconda attività che proponiamo è presentata come un gioco di magia; ciò è espresso esplicitamente agli alunni per suscitare la loro curiosità. Si chiede a un volontario di pensare ad un numero compreso tra 0 e 15, senza rivelarlo, e di rispondere a 7 domande:

1. Il numero che hai pensato è maggiore di 7 (e diverso da 7)?
2. È uno tra i numeri 4,5,6,7,12,13,14,15?
3. È uno tra i numeri 2,3,6,7,10,11,14,15?
4. È dispari?
5. È uno tra i numeri 2,3,4,5,8,9,14,15?
6. È uno tra i numeri 1,2,4,7,9,10,12,15?
7. È uno tra i numeri 1,3,4,6,8,10,13,15?

Per rendere il tutto più accattivante, il volontario ha la possibilità di mentire una volta (cioè di dare la risposta errata ad al più una delle domande). Una volta ottenute le 7 risposte, l'insegnante mate-mago è in grado di indovinare velocemente il numero pensato dal volontario e di individuare anche l'eventuale menzogna. La reazione tipica degli studenti è lo stupore e, aspetto più rilevante, la formulazione della domanda "Come funziona?". La spiegazione è fornita in vari passi, che richiedono il contributo attivo degli studenti, cioè, una loro ragionevole parte di lavoro.

Passo 1: introdurre lo strumento principale. Per prima cosa, viene rivelato che il mate-mago utilizza uno schema speciale per risolvere il problema, come mostrato in Figura 3. Ogni pallino numerato è associato a una domanda. Il primo compito consiste nel rispondere alle 7 domande senza mentire e a procedere secondo queste istruzioni: colorare i pallini corrispondenti alle risposte positive e lasciare bianchi quelli corrispondenti alle risposte negative.

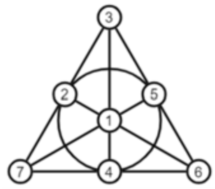

Figura 3. Schema utilizzato nel gioco 7 domande e 1 menzogna

Al fine di coinvolgere attivamente gli alunni, abbiamo progettato l'attività nel modo seguente. Ad ogni studente viene assegnato un numero da 0 a 15 e dato il compito di colorare lo schema secondo le istruzioni date basandosi sulle proprie risposte (evitando le menzogne per ora). Tale attività può essere svolta anche in coppia: prima uno studente risponde alle domande riguardo al proprio numero e l'altro colora lo schema e poi i ruoli si invertono. Al termine dell'attività ogni studente avrà uno schema colorato corrispondente a un numero preciso noto (vedere ad esempio la Figura 4).

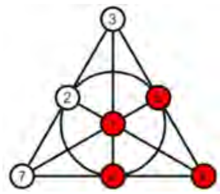

Figura 4. Schema colorato corrispondente al numero 9

Passo 2: condivisione di osservazioni. Ogni studente è chiamato a descrivere come ha colorato il proprio schema e a quale numero esso corrisponde. L'idea è che tutti gli studenti possano visualizzare i vari schemi colorati e i numeri ad essi associati (ad esempio l'insegnante può riprodurre gli schemi colorati sulla lavagna o sulla lim). A questo punto si svolge la parte più importante dell'attività: gli studenti sono invitati a condividere le loro osservazioni sugli schemi colorati e a descriverne le proprietà, motivando i propri interventi. Si tratta di un problema aperto, in cui non c'è un'unica risposta corretta. Eventualmente guidati dall'insegnante, gli alunni sono portati a scoprire due regole fondamentali:

1. Ogni numero da 0 a 15 corrisponde a uno e un solo modo di colorare lo schema. Questo significa che avendo a disposizione l'elenco di tutti i possibili schemi colorati secondo le istruzioni (Figura 5) è possibile risolvere il gioco delle 7 domande (senza bugie).

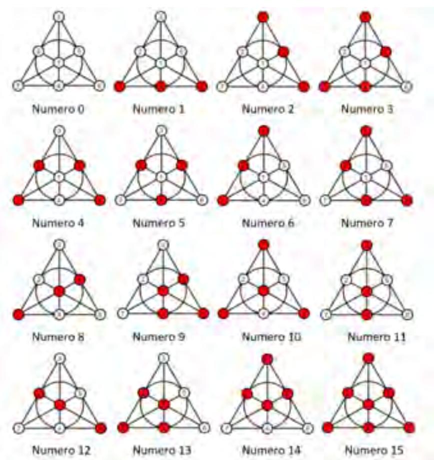

Figura 5. Elenco di tutti gli schemi colorati secondo le istruzioni (e senza menzogne)

2. Tutti gli schemi colorati rispettano uno di questi 4 comportamenti:
   - Tutti i pallini sono bianchi (e il numero associato è lo 0);
   - Tutti i pallini sono colorati (e il numero associato è il 15);
   - Ci sono 4 pallini colorati e 3 bianchi allineati o posizionati attorno alla circonferenza;

- Ci sono 4 pallini bianchi e 3 colorati allineati o posizionati attorno alla circonferenza.

Passo 3: Riconoscere la menzogna. La seconda regola scoperta al Passo 2 fornice un metodo per identificare la menzogna. Infatti, se lo schema colorato secondo le risposte del volontario non soddisfa una delle 4 possibilità elencate, allora c'è un unico pallino che rompe il modello e sarà sufficiente trovarlo e correggerlo (colorandolo se è bianco e viceversa). Questa procedura permette di prendere due piccioni con una fava: riconoscere la menzogna (corrispondente al pallino errato) e ottenere lo schema colorato correttamente, che assieme all'elenco di Figura 5 permette di indovinare il numero pensato dal volontario.

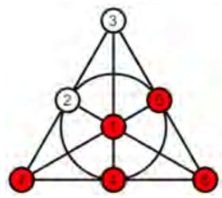

Figura 6. Schema corrispondente al numero 9 con una menzogna nella risposta alla domanda 7

Il modulo WIMS (Cazzola, 2021b) contiene il gioco in due versioni: una in cui il software gioco il ruolo del mago (senza spiegare il trucco ma indovinando solo il numero e la menzogna) e una, chiamata "Ora indovina tu", in cui il trucco è spiegato e al giocatore è richiesto di indovinare il numero misterioso e identificare la menzogna a partire da uno schema colorato (come in Figura 6).

Passo 4: i numeri in base 2. L'attività può considerarsi conclusa al Passo 3, ma uno dei nostri obiettivi è quello di sfruttare il gioco per introdurre argomenti profondi di matematica. Pertanto, possiamo mostrare agli studenti un metodo alternativo alla consultazione dell'elenco di schemi colorati per indovinare il numero misterioso. Una volta che la menzogna è stata identificata e corretta (come descritto al Passo 3), la strategia consiste nel porre l'attenzione solo sui pallini numerati da 1 a 4. L'istruzione è quindi la seguente: scrivere 1 se il pallino è colorato e 0 se il pallino è bianco. Ad esempio, lo schema (corretto) associato al numero 9 fornirà la sequenza 1001. Il lettore avrà notato che la sequenza 1001 è proprio la scrittura del numero 9 in base 2. Infatti, questo gioco può essere un buon espediente per introdurre le base numeriche. Anche in questo caso, il documento WIMS (Cazzola, 2021a) fornisce un prezioso aiuto per l'insegnante, offrendo vari giochi interattivi sull'argomento. L'idea è quella di utilizzare dei cubetti che rappresentano le unità e che possono essere raggruppati in blocchi di colori e dimensioni diverse (le potenze di 2). Al giocatore viene dato un numero e la richiesta di trovare il numero minimo di blocchi necessari per rappresentarlo (Figura 7).

Figura 7. Blocchi in Base 2

Passo 5: Conclusioni. Ora che il trucco è completamente svelato, è possibile analizzare quanto fatto. Gli studenti hanno scoperto un codice speciale (lo schema colorato) che può contenere un errore (il pallino che corrisponde alla menzogna). Una volta corretto l'errore e recuperato lo schema corretto, questo può essere associato a una stringa di 4 cifre in codice binario che fornisce la soluzione al gioco. Inoltre, si può notare che le risposte alle domande dalla 5 alla 7 non servono a rivelare il numero misterioso ma ad identificare l'errore (la menzogna): se non fosse consentito mentire, basterebbero le prime 4 domande. Questo è un esempio di codice a correzione d'errore di Hamming.

LA NOSTRA ESPERIENZA

Abbiamo proposto queste attività ad Aprile 2021 a quattro classi di scuola primaria (due terze e due quarte), per un totale di 74 studenti. La tutor era collegata per via telematica, mentre gli studenti si trovavano in classe assieme alle insegnanti. Questa disposizione ha permesso alla tutor di proiettare le pagine di WIMS sullo schermo della lavagna interattiva e allo stesso tempo ha dato la possibilità agli studenti di lavorare in coppie e di utilizzare strumenti concreti: la doppia ruota di carta descritta nel paragrafo 4.1 e una scheda contenente lo schema introdotto nel paragrafo 4.2. Le attività si sono svolte come descritto nella sezione 4 e sono state suddivise in due incontri da due ore ciascuno. Dopo ogni incontro, gli studenti hanno risposto per iscritto alle domande “Cosa hai imparato oggi?” e “Quale domanda, dubbio o curiosità ti rimane dopo l'incontro di oggi?”. Abbiamo costruito la nostra analisi basandoci sulle risposte a queste domande e su osservazione diretta durante lo svolgimento delle attività. Gli alunni hanno dimostrato un grande entusiasmo nello svolgimento delle attività proposte, come dimostrato dall’uso frequente di parole quali “divertimento, molto interessante, bello” nei loro feedback scritti. Si sono dimostrati coinvolti nei vari compiti e desiderosi di condividere le loro scoperte. In particolare, nel Passo 2 del gioco “7 domande e 1 menzogna” gli studenti hanno elaborato moltissime osservazioni e sono stati in grado di individuare le regole fondamentali. Ci teniamo a sottolineare che gli studenti non si sono limitati alla descrizione di proprietà degli schemi colorati, ma hanno cercato di motivare i loro interventi. Ad esempio, hanno osservato che il numero 0 era associato allo schema completamente bianco perché tale numero corrisponde a risposte negative alle domande 1 e 4 e non compare in alcuna delle altre. Il gioco di magia da noi proposto stimola, quindi, lo sviluppo della competenza dell’argomentazione, esempio di ragionamento matematico di alto livello. Risultati simili sono stati prodotti anche dall’attività “Cifrare e decifrare messaggi segreti”. Nel Passo 4, infatti, gli alunni miravano ad essere i primi a scoprire la chiave segreta e hanno proposto molte strategie per svolgere questo compito. Hanno così dimostrato la loro abilità nel riconoscere schemi in testi lunghi e nell’utilizzarli per risolvere problemi di decifratura. È interessante notare che una delle tecniche da loro proposte è stata quella di considerare quanto spesso comparivano certe lettere, applicando in modo informale la tecnica crittografica di analisi di frequenza. Altro beneficio del nostro approccio giocoso è stato il fatto che gli alunni si sono sentiti liberi di condividere le soluzioni elaborate, senza paura di commettere errori o essere giudicati, lavorando come gruppo per giungere alla soluzione. Questo ha portato ad interessanti scambi di idee. Ad esempio, nel Passo 2 del gioco “7 domande e 1 menzogna”, uno studente ha commesso un errore nel colorare il proprio schema, corrispondente al numero 5. Immediatamente un’altra studentessa ha alzato energicamente la mano, cercando di attirare il più possibile l’attenzione di insegnanti e tutor. Ha quindi dichiarato con fermezza che l’amico doveva per forza aver commesso un errore, perché anche lei aveva analizzato il numero 5 e il suo schema era colorato diversamente. Nel condividere questa osservazione, l’alunna ha anche dimostrato di aver già individuato la corrispondenza biunivoca tra schemi colorati e numeri, aspetto non ovvio a priori. Questo è un esempio di come un ambiente di gioco possa incoraggiare in maniera naturale lo sviluppo di ragionamento matematico. Dai feedback scritti degli studenti, abbiamo inoltre riscontrato che le attività svolte hanno avuto un impatto positivo sulla loro concezione della matematica, scoperta come disciplina divertente e utile (ad esempio per scambiare messaggi segreti con gli amici). Infine, è emerso il desiderio di approfondire gli argomenti proposti: uno studente, ad esempio, ha espresso la curiosità di capire se il gioco di magia continuasse a funzionare ammettendo più di una bugia. Questa richiesta, apparentemente semplice, rivela un tentativo di generalizzazione ed è legata a un difficile problema matematico.

CONCLUSIONI

L’esperienza descritta ci porta a concludere che le attività da noi progettate possono fornire una base solida per la costruzione di attività che pongano gli studenti al centro e che siano coinvolgenti e significative per studenti di scuola primaria. Come descritto nella Sezione 5, la nostra proposta ha raggiunto gli obiettivi preposti di coinvolgere gli studenti, aumentare la motivazione, migliorare l’approccio alla matematica e stimolare il ragionamento matematico. Inoltre, la nostra proposta fornisce ulteriore evidenza dei benefici derivanti dall'introdurre la crittografia nella scuola primaria, in particolare all'interno di laboratori di matematica basati sulla risoluzione dei problemi. Infine, la presenza di una proposta virtuale realizzata con il software WIMS, offre un valore aggiunto al progetto, combinando competenze tecnologiche all'utilizzo di strumenti più tradizionali, quali carta e penna. consente di coinvolgere varie competenze

Il nostro obiettivo è quello di fornire esempi pronti all'uso per gli insegnanti e speriamo che i materiali disponibili su WIMS si rivelino utili allo scopo. Inoltre, confidiamo che il nostro lavoro contribuisca a mostrare quanto l'approccio legato al gioco possa effettivamente migliorare l'insegnamento della matematica.

BIBLIOGRAFIA

B. Divjak e D. Tomić (2021). The Impact of Game-Based Learning on the Achievement of Learning Goals and Motivation for Learning Mathematics - Literature Review. *Journal of Information and Organizational Sciences*, 35(1).
M. Cazzola, S. Lemaire, and B. Perrin-Riou (2020). Wims, a Community of Teachers, Developers and Users. *Notices of the American Mathematical Society*, vol. 67, pp. 1770 – 1779.
M. Cazzola (2021a). Numeri e codici.
https://wims.matapp.unimib.it/wims/wims.cgi?module=E4/number/doccrypto.it. *WIMS learning object*.
M. Cazzola (2021b). OEF crittografia elementare. 1
https://wims.matapp.unimib.it/wims/wims.cgi?module=E4/game/oefcesare.it. *WIMS learning object*.
G. Polya (1980). *Mathematical Discovery: On Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving.* John Wiley and Sons, Combined ed.
G. Polya (1945). *How to solve it: a new aspect of mathematical method.* Princeton University Press.
J. R. Savery (2006), Overview of problem-based learning: Definition and distinctions. *The Interdisciplinary Journal of Problem-based Learning*, vol. 1, no. 1, pp. 9–20.
G. Xiao (2001). WIMS: An Interactive Mathematics Server. *Journal of Online Mathematics and its Applications*, vol. 1, no. 1.
P. J. Cameron (1994). *Combinatorics: topics, techniques, algorithms.* Cambridge University Press.
G. Xiao (1999). Decrypt.4
https://wims.matapp.unimib.it/wims/wims.cgi?module=H6/algebra/decrypt.en. *WIMS learning object*.