Problema inverso per la conducibilità

Basta scambiare i ruoli delle Hp. con la Th.?

Tentativo:

sia $z \in \mathscr{C}^0(\bar{D}) \cap \mathscr{C}^2(D)$, $f \in \mathscr{C}^0(\bar{D})$

si voglia determinare

$a \in \mathscr{C}^1(\bar{D})$ tale che

1) $(0<)\, a_L \leq a \;(\leq a_H)$, $\forall x \in \bar{D}$

2) $(a z')' = f$ in $D$

Osservazioni

I) sia $z' \neq 0$ $\forall x \in \bar{D}$, allora si deve risolvere rispetto ad $a$ la ODE di I ordine

$$a'z' + az'' = f \quad \text{in } D,$$

$\neq 0$, quindi ODE non singolare

dove ... manca un dato! (per esempio $a[\bar{x}]$, $\bar{x} \in \bar{D}$)

II) sia $z' = 0$ in qualche punto $\tilde{x} \in \bar{D}$

$$\Rightarrow \quad a'[\tilde{x}]\cancel{z'}[\tilde{x}] + a[\tilde{x}]\, z''[\tilde{x}] = f[\tilde{x}]$$

la ODE degenera in equazione algebrica in $\tilde{x}$

$$a[\tilde{x}]\, z''[\tilde{x}] = f[\tilde{x}],$$

che può avere senso o no.

VI-01

Identificazione di $a[\cdot]$ ricondotta a problema di CAUCHY

dominio : intervallo limitato $D \equiv (0,1)$

dati : continui

condizione di unicità : dato di CAUCHY o equivalente

Pbm di CAUCHY $\nearrow$ regolare (1)

$\searrow$ singolare (2)

condizione non locale (3)

---

$\exists$, Unicità da Pbm di CAUCHY regolare

**Prop.** Sia $z' \neq 0$ in $\bar{D}$ ; $a[0]=a_0$ , $f \in C^0(\bar{D})$

allora

$$a[x] = \frac{F[x] + a_0 z'[0]}{z'[x]}$$

dove $F[x] = \int_0^x f[\eta]\,d\eta$

che è conforme ai vincoli qualora

$$(0<)\,a_L \leq \frac{F[x] + a_0 z'[0]}{z'[x]} \leq a_H \quad \forall x \in \bar{D}$$

VI-02

Esempio (continuazione)

$D = (0,1)$ ; $z = 1 + x$, $f = 0$ $\Rightarrow$ $a' = 0$ in $D$

Se viene assegnato

$$a[0] = 1$$

allora $a = 1$, $\forall x \in \bar{D}$.

ESISTENZA ✓
UNICITÀ ✓
STABILITÀ ◯

Stima della stabilità di $a[\cdot]$ rispetto a $z[\cdot]$: come prima

$$\zeta_k = 1 + x + \varepsilon \frac{\cos 2\pi k x}{2\pi k} - \varepsilon/2\pi k$$

$\varepsilon \in [0,1)$ ; $k \geq 1$, intero

si cerca $\alpha_k$ tale che

$$\begin{cases} (\alpha_k \zeta_k')' = 0 & \text{in } D \\ \alpha_k[0] = 1 \end{cases}$$

Risulta

$$\alpha_k = \frac{1}{1 - \varepsilon \sin 2\pi k x}$$

perché $\varepsilon < 1 \Rightarrow \zeta_k' > 0$.

si deve cercare una coppia di norme $\|\cdot\|_A, \|\cdot\|_Z$ ed una costante $C_4$ ($>0$) indipendente da $\varepsilon$ e $k$ tale che

$\forall \varepsilon, \forall k$ $\quad \|\alpha_k - a\|_A \leq C_4 \|\zeta_k - z\|_Z$

Si verifica che

se $\|\alpha_k - a\|_A = \max\limits_{D} |\alpha_k - a|$; $\|\zeta_k - z\|_Z = \max\limits_{D} |\zeta_k - z|$

allora $\neg C_4$.

Infatti

$$\left\{ \|\alpha_k - a\|_A = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \; ; \; \|\zeta_k - z\|_Z = \frac{\varepsilon}{\pi k} \right\} \Rightarrow C_4 \geq \frac{\pi k}{1-\varepsilon}$$

NON SI PUÒ MAGGIORARE! #

VI-03

# SENSIBILITÀ & STABILITÀ

Metodo dell'equazione del difetto
(defect equation, Defektgleichung)

PBM.

di riferimento | Variato

$$\left\{\begin{array}{lll} (a z')' = f \ ; & x_0 < x < x_1 \ ; & (\alpha \zeta')' = f \\ z[x_0] = z_0 & & \zeta[x_0] = z_0 \\ z[x_1] = z_1 & & \zeta[x_1] = z_1 \end{array}\right\}$$

$\downarrow$ SOTTRARRE

$$(a z')' - (\alpha \zeta')' = 0$$

$\downarrow$ AGGIUNGERE ZERO

$$(\alpha \zeta')' - (a z')' - (a \zeta')' + (a \zeta')' = 0$$

$\downarrow$ RACCOGLIERE

$$((\alpha - a)\zeta')' + (a(\zeta - z)')' = 0$$

(per linearità)

DEFINIRE $B := \alpha - a \ ; \ Y := \zeta - z$

$\downarrow$ SOSTITUIRE, SPOSTARE

$$(B \zeta')' = -(a Y')' \qquad \text{EQUAZIONE DEL DIFETTO}$$

CAUSA ($B$) → PBM DIRETTO → EFFETTO ($Y$)

STIMA CERCATA $\|Y\|^{(0)}_Z \le C_{DIR} \|B\|_A$

EFFETTO ($B$) ← PBM INVERSO ← CAUSA ($Y$)

STIMA CERCATA $\|B\|_A \le C_{INV} \|Y'\|^{(1)}_Z$

IV-01

VI-05

Dov'è l'errore?

nella scelta delle norme!

**Osservazione**

nella ODE $a'z' + az'' = f$ rispetto ad $a[\cdot]$ il coefficiente principale non è $z$, bensì $z'$ $\Rightarrow$ occorre includere $z'$ nelle stime.

**Notazione**

$B := \alpha_k - a$ ; $Y := \zeta_k - z$

Da $(\alpha_k \zeta_k')' = f$ e $(a z')' = f$

si ricava

$$(B\zeta_k')' = -(aY')'$$

EQUAZIONE DEL DIFETTO

<u>PROP</u> sia $\min_{\bar{D}} |\zeta_k'| \geq \beta$ $(>0)$ allora $\exists\, c$ $(>0)$ indipendente da $\varepsilon$, $k$, tale che

$$\max_{\bar{D}} |B| \leq c \max_{\bar{D}} |Y'|$$

dimostrazione

integrare l'eqn del difetto: $B\zeta_k' = -aY' + c_1$;

poiché $B[0]=0$, $Y'[0]=0 \Rightarrow c_1 = 0$

$$B = -aY'/\zeta_k'$$

Nell'esempio:

$\max_{\bar{D}} |Y'| = \varepsilon$ ; $\min_{\bar{D}} |\zeta_k'| = 1-\varepsilon$

$\Rightarrow \max_{\bar{D}} |B| = \max_{\bar{D}} a \max_{\bar{D}} |Y'| / \min_{\bar{D}} |\zeta_k'| \Rightarrow$

$\max_{\bar{D}} |B| = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$ $(c=1)$ □

# $\exists$ ed unicità da problema di CAUCHY singolare

**PROP.**

1) sia $H := \{\eta_k \mid 1 \le k \le \mathcal{K}\}$ l'insieme dei punti critici, tali che $\eta_k \in \bar{D}, \forall k$; $\mathcal{X}'[\eta_k] = 0$

2) Sia $\mathcal{X}''[\eta_k] \neq 0 \ \forall k \ (1 \le k \le \mathcal{K})$

3) $\exists \lim\limits_{x \to \eta_k} \dfrac{F[x] + c_1}{\mathcal{X}'[x]}, \forall k$

4) tali limiti soddisfino

$$(0<)\ a_L \le \lim_{x \to \eta_k} \frac{F[x] + c_1}{[x]} \ (\le a_H)$$

5) valga la condizione di compatibilità

$$F[\eta_k] = -c_1, \quad \forall k$$

allora risulta

$$a[x] = \frac{F[x] + c_1}{\mathcal{X}'[x]}, \ \forall x \in \bar{D}$$

VI-06

**Prop** (unicità da una condizione non locale)

1) $z' \neq 0 \quad \forall x \in \bar{D}$

2) ~~sia noto~~

$$\frac{1}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} a z' \, dx = m$$

allora

$$a[x] = \frac{F[x] + m - \frac{1}{x_1 - x_0} \int F[x] \, dx}{z'[x]}$$

3) qualora risulti

$$(0 <)\ a_L \leq a[x] \leq a_H \quad \forall x \in \bar{D}$$

allora la soluzione proposta è anche conforme ai vincoli bilateri

---

<u>Oss</u> $\dfrac{1}{x_1 - x_0} \displaystyle\int_{x_0}^{x_1} a z' \, dx$ : flusso (idrico) medio attraverso l'intervallo

VI-07

20050528

# Processo diffusivo monodimensionale stazionario

Pbm di DIRICHLET per l'equazione

$$\begin{cases} (au')' = f & \text{in } (0,1) \\ u[0] = u_0 \ , & u[1] = u_1 \end{cases}$$ $\equiv$ pbm diretto

Discretizzazione : $1 \le i \le J$


$$\frac{z_{i-1} - z_i}{h_{i-1,i}} t_{i,i-1} - \frac{z_{i+1} - z_i}{h_{i,i+1}} t_{i,i+1} = f_i \cdot h_{i-1,i}$$

aggregando ... $2 \le i \le J-1$

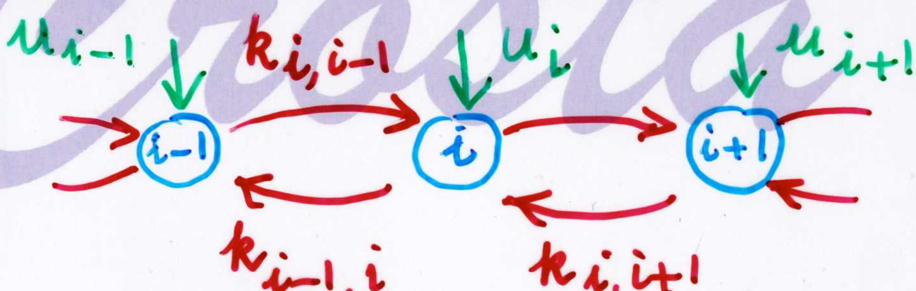
$$(z_{i-1} - z_i) k_{i,i-1} - (z_{i+1} - z_i) k_{i,i+1} = u_i$$

dove le condizioni ai limiti compaiono ...

$$u_2 = f_2 \cdot h_{1,2} - u_0 k_{2,1} \qquad u_0 = z_1$$

$$u_{J-1} = f_{J-1} \cdot h_{J-2,J-1} - u_1 k_{J-1,J} \qquad u_1 = z_J$$

Traduzione in $\mathcal{S}$ compartimentale :




CATENARIO CHIUSO

RECIPROCO : $k_{i,j} = k_{j,i}$

STAZIONARIO : pbm diretto $\doteq$ determinare lo stato di equilibrio @ $\underline{u}$ costante

20050530

Ulteriori proprietà del $S$ catenario desunto dall'eqn di diffusione 1-D discretizzata

1- $\left\{\sum_{i=1}^{N} k_{ij} = 0 \quad \forall j, \ 1 \le j \le N\right\} \Rightarrow$

(somma per righe di ciascuna colonna $= 0$)

$\Rightarrow \det \underline{\underline{A}} = 0$

ossia $\lambda = 0$ è autovalore di $\underline{\underline{A}}$

Dim sia $\underline{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ ; risulta $\underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{y} = \underline{0}$

ossia $\underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{y} = \lambda_0 \cdot \underline{y}$ con $\lambda_0 = 0$

$\underline{y}$ è un autovettore associato all'autovalore $\lambda_0 = 0$ di $\underline{\underline{A}}^T$; ma $\underline{\underline{A}}$ ed $\underline{\underline{A}}^T$ hanno i medesimi autovalori.

2- $\alpha_0 = 1$.

Dal thm di HEARON: $\underline{\underline{A}}$ compartimentale $\Rightarrow$

$\Rightarrow \{\mathrm{Re}\,\lambda \le 0 \ \forall \lambda; \ \mathrm{Re}\,\lambda = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}\,\lambda = 0\}$

$\Rightarrow \lambda_0$ è l'autovalore minimo $(\lambda_N)$

Thm di LANCASTER: $S$ fortemente connesso $\Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_N = 1 \Rightarrow \alpha_0 = 1$