Giovanni FRANCO CROSTA Metodi Matematici per le Scienze Ambientali

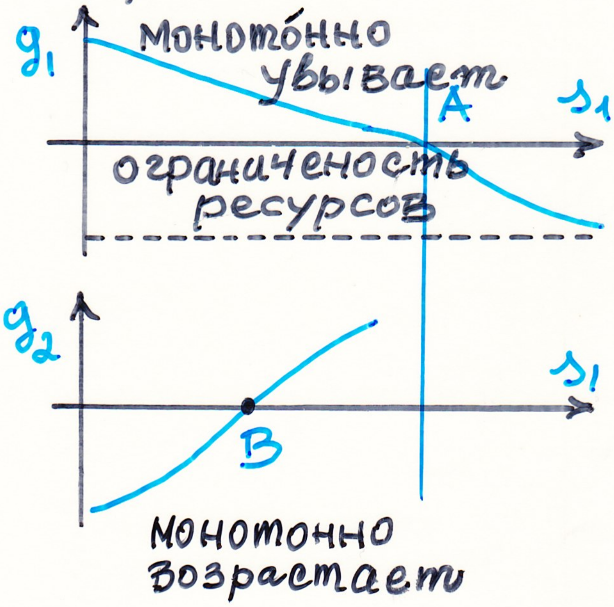
Variazioni su un tema di VOLTERRA: II parte

Sia $S_+ := \{s_1 \geq 0, s_2 \geq 0\}$

Siano $g_1, g_2, h \in \mathcal{B}^1([0,\infty))$

"Сформулируем еще три ограничения..."

$$(3)\begin{cases} g_1 = g_1[s_1]; \\ g_1[0] > 0 > g_1[\infty] > -\infty; \\ dg_1/ds_1 < 0; \quad g_1[A] = 0. \end{cases}$$



$$(4)\begin{cases} g_2 = g_2[s_1]; \\ g_2[0] < 0 < g_2[\infty]; \\ dg_2/ds_1 > 0; \quad g_2[B] = 0. \end{cases}$$

(5) $h[s_1] > 0$ при $s_1 > 0$

Системы (4)

$$\mathcal{S}\ (4,0)\begin{cases} d_t s_1 = g_1[s_1]\, s_1 - h[s_1]\, s_2 \\ d_t s_2 = g_2[s_1]\, s_2 \\ s_1 \geq 0; \quad s_2 \geq 0; \quad h[s_1 = 0] = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{S}\ (4,++)\begin{cases} d_t s_1 = g_1[s_1]\, s_1 - h[s_1]\, s_2 \\ d_t s_2 = g_2[s_1]\, s_2 \\ s_1 > 0; \quad s_2 \geq 0 \\ h[s_1 = 0] > 0 \end{cases} \qquad \mathcal{S}\ (4,+0)\begin{cases} s_1 = 0 \\ d_t s_2 = g_2[0]\, s_2 \\ s_2 \geq 0 \end{cases}$$

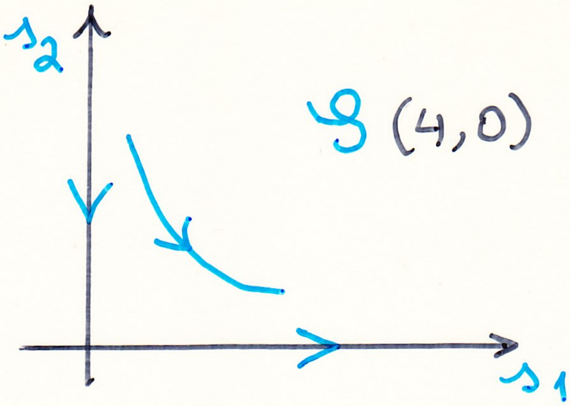
А. Н. Колмогоров, "Качественное изучение математических моделей динамики популяций," Проблемы Кибернетики, 25 (1972), 100-106.

2013 дек 06

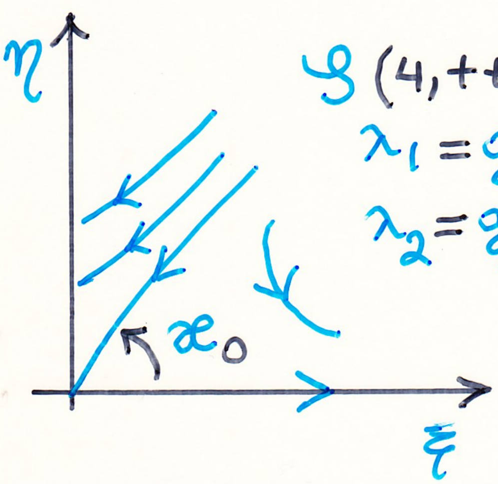
Giovanni Franco Crosta Metodi Matematici per le Scienze Ambientali

Особые точки $\{0,0\}$ и $\{A,0\}$ при $B<A$.

$\{0,0\}$:



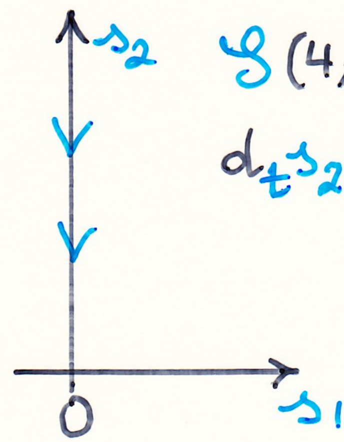
$\mathcal{S}(4,0)$



$\mathcal{S}(4,++)$

$\lambda_1 = g_1[0]$ (>0)

$\lambda_2 = g_2[0]$ (<0)



$\mathcal{S}(4,+0)$

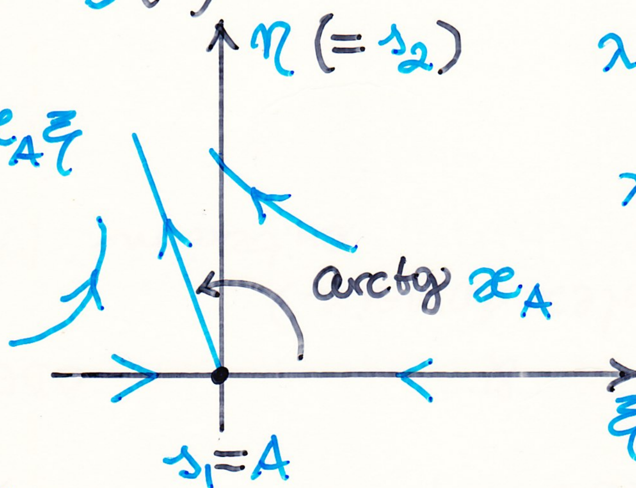
$d_t s_2 = g_2[0]\, s_2$

$\ominus$

$$\eta = \varkappa_0 \xi, \quad \varkappa_0 = \frac{g_1[0] - g_2[0]}{h[0]} \quad (>0)$$

$\{A,0\}$: $\mathcal{S}(4)$

$\eta = \varkappa_A \xi$



$$\lambda_1 = A \left.\frac{dg_1}{ds_1}\right|_A \quad (<0)$$

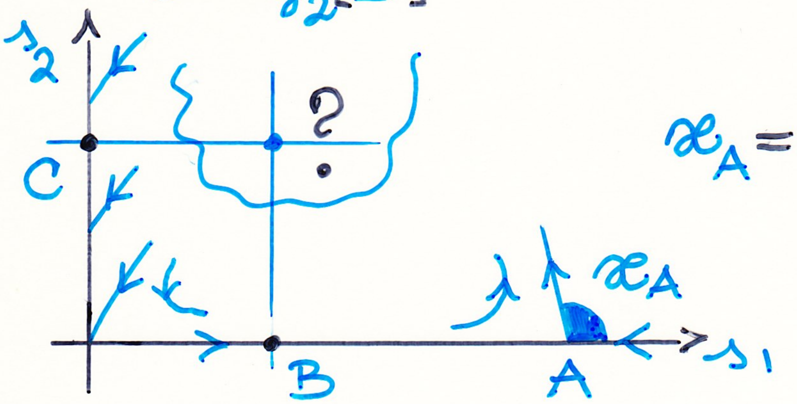
$$\lambda_2 = g_2[A] \quad (>0)$$

$$\varkappa_A = \frac{A \left.\frac{dg_1}{ds_1}\right|_A - g_2[A]}{h[A]} \quad (<0)$$

2013 Дек. 06

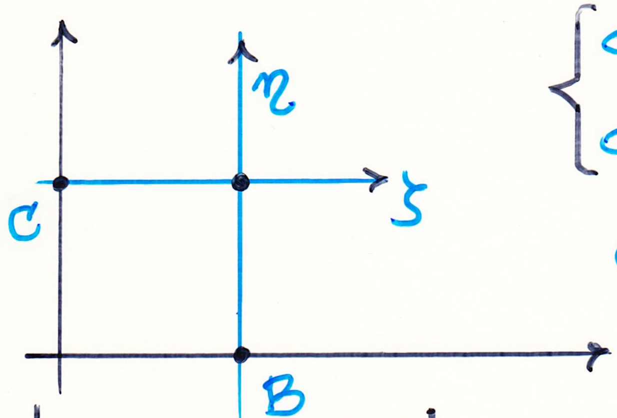
Третья особая точка $\mathcal{S}(4,++)$, при $\{B<A,\ h[0]>0\}$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= g_1[B]\cdot B - h[B]\,C \\ 0 &= g_2[B] \end{aligned}\right\} \Rightarrow C = \frac{g_1[B]}{h[B]}\,B$$



$$\varkappa_A = \frac{A\, d_1 g_1|_A - g_2[A]}{h[A]} < 0$$

Линеаризованные уравнения в точке $\{B, C\}$



$$\begin{cases} d_t\zeta = -\sigma\zeta - h[B]\,\eta \\ d_t\eta = C\cdot d_1 g_2|_B\cdot\zeta \end{cases}$$

$$\sigma := -g_1[B] - d_1 g_1|_B\cdot B + d_1 h|_B\cdot C$$

$$\Delta := \begin{vmatrix} -\sigma & -h[B] \\ d_1 g_2|_B\cdot C & 0 \end{vmatrix} > 0; \quad \lambda^2 + \sigma\lambda + \Delta = 0$$

$$\sigma^2 \begin{cases} \geq 4\Delta^2 : \text{узел} \\ < 4\Delta^2 : \text{фокус} \end{cases} \qquad \sigma \begin{cases} > 0 : \text{устойчивость} \\ < 0 : \text{неустойчивость} \end{cases}$$

"Исследуем еще судьбу сепаратрисы, выходящей из точки $\{A, 0\}$. ..."

Giovanni FRANCO CROSTA Metodi Matematici per le Scienze Ambientali

"Легко видеть, что при наших допущениях, траектории не могут уходить в бесконечность."

Prop. T1) $\lim_{s_2 \to \infty} s_1[s_2] < \infty$.

T2) $\left\{ s_2 \gg 0; \dfrac{ds_2}{ds_1} = 0 \right\} \Rightarrow \left\{ d_t s_1 < 0; \dfrac{d^2 s_2}{ds_1^2} < 0 \right\}$.

dim.

T1) $d_t s_1 = g_1 s_1 - h s_2$

$\{ g_1[s_1] < 0, s_1 > A; h[s_1] > 0 \ \forall s_1 > 0 \} \Rightarrow d_t s_1 < 0, s_2 \gg 0$.

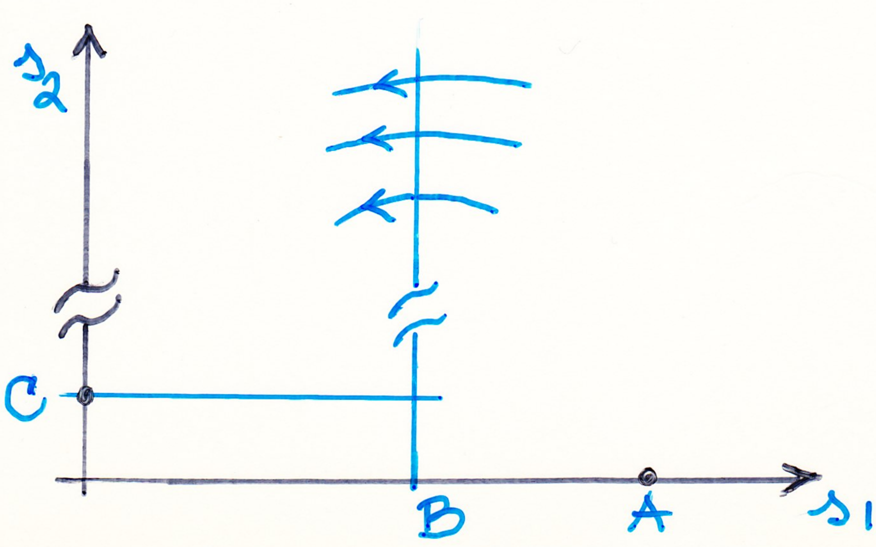
T2) $\dfrac{ds_2}{ds_1} = \dfrac{g_2[s_1] s_2}{g_1[s_1] s_1 - h[s_1] s_2} = 0$ @ $g_2 = 0 \doteq s_1 = B$;

$\{ d_t s_1|_B = g_1[B] B - h[B] s_2; s_2 \gg 0 \} \Rightarrow d_t s_1|_B < 0$

$$\frac{d^2 s_2}{ds_1^2} = \frac{(g_1 s_1 - h s_2) s_2 d_1 g_2 - (d_1 g_1 s_1 + g_1 - d_1 h s_2) g_2 s_2}{(g_1 s_1 - h s_2)^2}$$

@ $\begin{cases} s_1 = B : \{ g_2[B] = 0; d_1 g_2 > 0; g_1[B] B - h[B] s_2 < 0 \} \Rightarrow \\ s_2 \gg 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{d^2 s_2}{ds_1^2} = \frac{(g_1 \overset{\oplus}{[B]} B - h \overset{\oplus}{[B]} s_2) \overset{\oplus}{s_2} \overset{\oplus}{d_1 g_2[B]}}{(\qquad)^2} < 0 \qquad \square$$



2013Дек06

Giovanni FRANCO CROSTA Metodi Matematici per le Scienze Ambientali