

Seminario di Metodi matematici
per i sistemi ambientali

Dinamica delle popolazioni:
rudimenti di teoria qualitativa

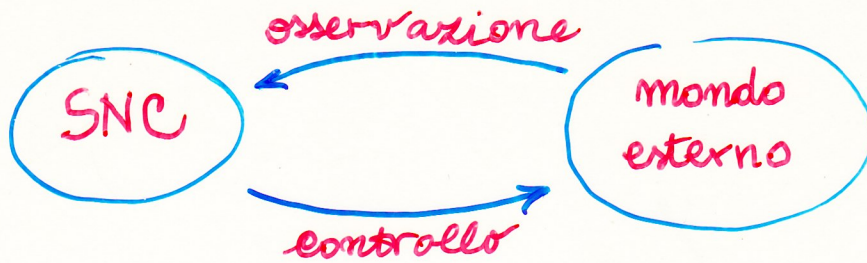
(Variazioni su un tema da un articolo (*)
di А.Н. Колмогоров [1972, n. 1])

GIOVANNI F. CROSTA

Milano, 2013 dic. 12

(*) А.Н. Колмогоров, "Качественное изучение
математических моделей динамики
популяций," Проблемы Кибернетики, 25
(1972) 100-109.

Relazioni dati sperimentali - modello



ciclo epistemologico:

genesì di un modello, } progetto degli esperimenti }
evoluzione del modello }

Classificazione delle procedure

modello - centriche
interpretare i **dati**
sperimentali (o le **os-**
servazioni) tramite un
modello avente proprietà
conosciute

dato - centriche
ricercare un **modello**
idoneo a leggere i
dati sperimentali
(o le **osservazioni**)

Sistema dinamico "modello"

$$\mathcal{S} := \{T, U, \Omega, S, Y, \Gamma; \vec{f}, \vec{m}\}$$

con l'abituale NOTAZIONE

T : insieme continuo, ordinato, dei tempi

U : spazio M -dimensionale degli ingressi

Ω : spazio delle funzioni (o anche distribuzioni) all'ingresso

S : spazio N -dimensionale degli stati

Y : spazio P -dimensionale delle uscite

Γ : spazio delle funzioni d'uscita

$\vec{f}[\cdot, \cdot, \cdot]: T \times S \times U \rightarrow \mathcal{C}S$ funzione generatrice
 $\vec{f} \in (\mathcal{C}^0[T \times S \times U])^N; \vec{f}[t, \vec{s}, \vec{u}] \in \mathbb{R}^N$

$\vec{m}[\cdot, \cdot]: T \times S \rightarrow Y$ trasformazione d'uscita
 $\vec{m} \in (\mathcal{C}^0[T \times S])^P; \vec{m}[t, \vec{s}] \in \mathbb{R}^P$

$$\mathcal{S} : \begin{cases} d_t \vec{s}[t] = \vec{f}[t, \vec{s}[t], \vec{u}[t]], & t \geq 0 \\ \vec{s}[0] = \vec{s}_0 \\ \vec{y}[t] = \vec{m}[t, \vec{s}[t]] \end{cases}$$

\vec{f} & semigruppoo causale.

dinamica delle popolazioni :

tassonomia dei processi e dei modelli

Modelli a tempo $\left\{ \begin{array}{l} \text{discreto} \\ \text{continuo} \end{array} \right.$

modelli a tempo continuo

- per specie singole
di crescita, logistici, con ritardo,
con distribuzione di età

- per due specie interagenti

preda-predatore LOTKA (1920) - VOLTERRA (1926)

KOLMOZOROB (1934)

KOLMOZOROB (1972)

competizione

simbiosi

- per più di due specie interagenti

ESEMPIO 1: \mathcal{V} di LUTKA-VOLTERRA ideale

$$\dim[S] = 2$$

$$\mathcal{V}: \begin{cases} d_t s_1 = (\varepsilon - \alpha s_2) s_1 = g_1[s_2] s_1 \\ d_t s_2 = (-m + \beta s_1) s_2 = g_2[s_1] s_2 \\ \vec{s}[0] = \vec{s}_0 \\ \vec{y} = \eta[\vec{s}] \end{cases}$$

Risposte che non richiedono di integrare il \mathcal{V}

* esistenza di soluzioni positive.

$$\begin{cases} \frac{d_t s_1}{s_1} = g_1[s_2] \\ \frac{d_t s_2}{s_2} = g_2[s_1] \end{cases} \begin{cases} \ln|s_1| = \int_0^t g_1[s_2] dt + c_1 \\ \ln|s_2| = \int_0^t g_2[s_1] dt + c_2 \end{cases} \begin{cases} s_1[t] = s_{10} e^{\int_0^t g_1[s_2] dt} \\ s_2[t] = s_{20} e^{\int_0^t g_2[s_1] dt} \end{cases}$$

$$\vec{s}_0 \in \mathbb{R}_+^2 \Rightarrow \vec{s}[t] \in \mathbb{R}_+^2 \quad \forall t \geq 0.$$

* esistenza di integrali primi

$$\begin{aligned} g_2[s_1] s_2 ds_1 - g_1[s_2] s_1 ds_2 &= 0 \\ \Rightarrow \frac{g_2[s_1]}{s_1} ds_1 &= \frac{g_1[s_2]}{s_2} ds_2 \end{aligned}$$

$$\beta s_1 + \alpha s_2 - m \ln s_1 - \varepsilon \ln s_2 = H[\vec{s}] = H[\vec{s}_0]$$

$\vec{s}_0, \vec{s} \in \Gamma$

¿ \exists traiettorie chiuse ?

Teoria qualitativa : obiettivi modello-centrici

DEF. (teoria qualitativa dei \mathcal{G} dinamici)

Insieme di metodi e procedimenti volti a determinare le proprietà (delle soluzioni) del \mathcal{G} dinamico senza integrare le equazioni del moto.

ELENCO degli obiettivi della teoria qualitativa in contesto modello-centrico

esistenza di soluzioni positive : $\vec{x} \in S_+$

esistenza di stati di equilibrio positivi : $\vec{\sigma} \in S_+$

($\equiv \{ \sigma_n > 0, 1 \leq n \leq N \}$)

stabilità degli stati $\vec{\sigma} \in S_+$

determinazione di invarianti positivi

di domini d'attrazione

esistenza di integrali primi (\Rightarrow costanti del moto)

esistenza di traiettorie chiuse

altre proprietà dello spazio di stato :

separatrici, cicli limite, ---

HENRI POINCARÉ (1854-1912) : \simeq 1881-1882.