$\mathcal{S}$ dinamico (autonomo), campo vettoriale, 1-forma differenziale

$$\dim[S]=N;\ \mathcal{S}:\begin{cases} d_t s_1 = f_1[\vec{s}] \\ --- \\ d_t s_N = f_N[\vec{s}] \end{cases},\quad \vec{f} \in (\mathcal{C}^1(S))^N$$

NOTAZIONE (à la PETER J. OLVER [2012])

$$\vec{v}[\cdot] := (f_1\partial_1 + f_2\partial_2 + --- + f_N\partial_N)[\cdot]$$

DEF. (1-forma differenziale su $H[\cdot]$)

Sia $H[\cdot] \in \mathcal{C}^2(S)$, $H: S \to \mathbb{R}$; si definisce 1-forma differenziale su $H[\cdot]$ desunta da $\vec{v}[\cdot]$ la seguente

$$\vec{v}H \equiv (f_1\partial_1 + f_2\partial_2 + --- + f_N\partial_N)H[\vec{s}].$$

OSS. $\vec{v}H$ si chiama anche derivata orbitale, o derivata di LIE, della $H[\cdot]$ perché

$$d_t H = \partial_1 H\, d_t s_1 + --- + \partial_N H\, d_t s_N = \vec{f} \cdot \nabla_{\vec{s}} H$$

DEF. (costante del moto)

Una funzione $H \in \mathcal{C}^2(S)$, $H: S \to \mathbb{R}$, che soddisfa

$$\Sigma_{n=1}^{N} f_n \partial_n H = 0$$

è detta costante del moto.

DEF. (costanti del moto di tipo polinomiale)

Un polinomio, p, è detto polinomio di DARBOUX per il campo vettoriale $\vec{v}$ qualora $\exists$ un polinomio Λ che soddisfi

$$\vec{v}p = \Lambda p.$$

Il polinomio Λ è detto autovalore di DARBOUX.

Una costante del moto di tipo polinomiale è un polinomio di DARBOUX ad autovalore $\Lambda = 0$.

Giovanni Franco Crosta Metodi Matematici per le Scienze Ambientali

Lemma di Morse, costanti del moto, orbite chiuse

Prop. Se il $\mathcal{S}$ descritto dal campo vettoriale $\vec{v}$ ammette una costante del moto, H, e se $\vec{\sigma}$ è uno stato di equilibrio isolato per $\mathcal{S}$, allora

$$\nabla H|_{\vec{\sigma}} = \vec{0}.$$

Dim. $\vec{v}H = (\Sigma_{n=1}^{N} f_n \partial_n) H = 0$ sulla traiettoria Γ equivale a

$$(\Sigma_{n=1}^{N} ds_n \partial_n) H|_{\Gamma} = 0 = d\vec{s} \cdot \nabla H|_{\Gamma}.$$

Se si tratta $\vec{\sigma}$ come traiettoria degenere ove $d\vec{s}$ è indeterminato, allora

$$d\vec{s} \cdot \nabla H|_{\vec{\sigma}} = 0 \Leftrightarrow \nabla H|_{\vec{\sigma}} = \vec{0}. \qquad \square$$

Def. (punto critico non degenere)
Sia $F: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ e sia $\vec{\sigma} \in \mathbb{R}^N$ un punto ove $\nabla F|_{\vec{\sigma}} = \vec{0}$. Sia $[\partial^2_{mn} F]$ la matrice Hessiana di $F[\cdot]$. Se

$$\det[\partial^2_{mn} F]|_{\vec{\sigma}} \neq 0$$

allora $\vec{\sigma}$ si dice punto critico non degenere di $F[\cdot]$.

Def. (funzione di Morse)
Se $\vec{\sigma}$ è punto critico non degenere di $F[\cdot]$, allora $F[\cdot]$ è detta funzione di Morse nell'intorno di $\vec{\sigma}$.

Def. (indice, k, del punto critico)
Sia $\vec{\xi} := \vec{s} - \vec{\sigma}$ e nell'intorno di $\vec{\sigma}$, critico e non degenere, $F[\cdot]$ ammetta la rappresentazione

$$F[\vec{s}] = F[\vec{\sigma}] - \Sigma_{n=1}^{k} c_n \xi_n^2 + \Sigma_{n=k+1}^{N} c_n \xi_n^2 + O[\vec{\xi}^3],$$

allora k si dice indice di $\vec{\sigma}$.

[Harold Calvin Marston Morse, 1892-1977]

LEMMA di MORSE, costanti del moto, orbite chiuse (segue)

LEMMA (MORSE, 1929–1930)

Sia $\vec{0}$ un punto critico, non degenere, di $F[\cdot]$, avente indice k; allora $\exists!$ trasformazione iniettiva, invertibile di classe $\mathscr{C}^1$ (cioè un $\mathscr{C}^1$-diffeomorfismo) che manda $F[\cdot]$ in $G[\cdot]$, con

$$G[\vec{\eta}] = G[\vec{0}] - \Sigma_{n=1}^{k} \eta_n^2 + \Sigma_{n=k+1}^{N} \eta_n^2$$

Dim. (MILNOR, 1963)

(Richiede di diagonalizzare l'Hessiano, che è reale, simmetrico e non ha autovalori nulli.)

COR. Se $k=0$ ed $F[\cdot]=H[\cdot]$ (costante del moto) allora

$N \geq 2$) gli insiemi di livello della $H[\cdot]$ nell'intorno di $\vec{\sigma}$ (critico e non degenere) sono diffeomorfi a superficie di sfere centrate in $\vec{\sigma}$;

$N=2$) le traiettorie del $\mathscr{S}$ di cui $H[\cdot]$ è costante del moto sono diffeomorfe a circonferenze centrate in $\vec{\sigma}$, cioè il $\mathscr{S}$ ammette orbite chiuse nell'intorno di $\vec{\sigma}$.

APPLICAZIONE al $\mathscr{S}$ L-V dell'Es. 1

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} m/\beta \\ \varepsilon/\alpha \end{pmatrix}; \quad H[\vec{s}] = \beta s_1 + \alpha s_2 - m \ln s_1 - \varepsilon \ln s_2$$

$$\nabla H = \begin{pmatrix} \beta - m/s_1 \\ \alpha - \varepsilon/s_2 \end{pmatrix}; \quad \nabla H|_{\vec{\sigma}} = \vec{0};$$

$$\partial^2_{11} H = m/s_1^2; \quad \partial^2_{21} H = \partial^2_{12} H = 0; \quad \partial^2_{22} H = \varepsilon/s_2^2$$

$$H[\vec{s}] = H[\vec{\sigma}] + \frac{\xi_1^2}{2} \cdot \partial^2_{11} H|_{\vec{\sigma}} + \frac{\xi_2^2}{2} \partial^2_{22} H|_{\vec{\sigma}} + O[\vec{\xi}^3] =$$

$$H[\vec{\sigma}] + \frac{\xi_1^2}{2} \frac{\beta^2}{m} + \frac{\xi_2^2}{2} \frac{\alpha^2}{\varepsilon} + O[\cdot]$$

$$H[\vec{s}] - H[\vec{\sigma}] \xrightarrow{L.M.} \eta_1^2 + \eta_2^2 = r_\Gamma^2.$$

[JOHN WILLARD MILNOR, 1931– .]