Giovanni Franco Crosta Metodi Matematici per le Scienze Ambientali

Variazioni su un tema di VOLTERRA: I parte

$$\mathcal{S}: \begin{cases} d_t s_1 = g_1[\vec{s}]\, s_1 \\ d_t s_2 = g_2[\vec{s}]\, s_2 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

HP. $g_1, g_2 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$

1) $\partial_2 g_1 < 0$; $\partial_2 g_2 < 0$

2) $g_2[K, 0] > 0$, dove $\binom{K}{0}$ è di equilibrio

3a) $\partial_1 g_1 < 0$; $\partial_1 g_2 > 0$

3b) $s_1 \partial_1 g_1 + s_2 \partial_2 g_2 < 0$; $s_1 \partial_1 g_2 + s_2 \partial_2 g_2 > 0$

Oss. se $\mathcal{S}$ è quasi-lineare.

KOLMOGOROFF, A.N., "Sulla theoria di VOLTERRA della lutta per l'esistenza," Giornale dell'Inst. Italiano degli Attuarii $\underline{7}$ (1936) 74-80.

SIGMUND, K. "Kolmogorob and population dynamics" Ch. 9, pp. 177-186 in --- (2004) [Internet]

Giovanni Franco Crosta Metodi Matematici per le Scienze Ambientali

Variazioni su un tema di VOLTERRA: segue I parte

TH. (principali proprietà qualitative del $\mathcal{S}$)

1- esistenza di soluzioni positive

$$\vec{s}_0 \in \mathbb{R}^2_+ \Rightarrow \begin{cases} s_1[t] = s_{10}\, e^{\int_0^t g_1 dt} > 0 \\ s_2[t] = s_{20}\, e^{\int_0^t g_2 dt} > 0 \end{cases} \forall t \geq 0$$

2- unicità dello stato di equilibrio, $\vec{\sigma}_B \in \mathbb{R}^2_+$

3- comportamento asintotico:

$$\lim_{t \to +\infty} |\vec{s}[t]| < \infty$$

4- proprietà della (unica) sella, $\vec{\sigma}_A$ $(\neq \vec{0})$

$$\vec{\sigma}_A = \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix},\ A > 0$$

4.1- $\exists!$ orbita Γ_A avente $\vec{\sigma}_A$ come α-limite:

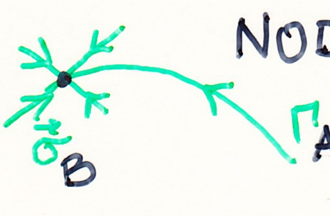
$$\lim_{t \to -\infty} \vec{s}[t] = \vec{\sigma}_A\ ,\ \text{se}\ \vec{s}[t] \in \Gamma_A$$

4.2- prolungamento di Γ_A: ha ω-limite al finito

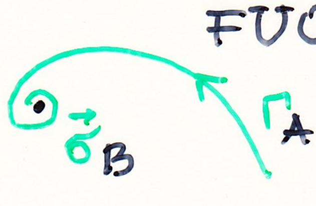
$$\lim_{k \to \infty} \vec{s}[t_k] = \vec{\sigma}_C\ ,\ \text{se}\ \vec{s}[t] \in \Gamma_A$$

casi possibili non patologici secondo 4.2

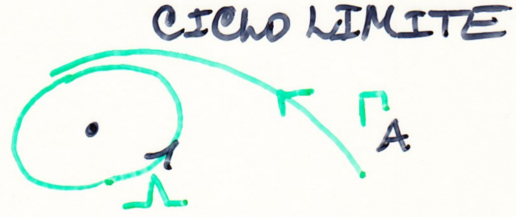
NODO



FUOCO



CICLO LIMITE



OSS. Il $\mathcal{S}$ di LOTKA-VOLTERRA logistico rientra in questa classe

$$\mathcal{S}_{LVl}: \begin{cases} d_t s_1 = (\varepsilon - \sigma s_1 - \alpha s_2) s_1 \\ d_t s_2 = (-m + \beta s_1) s_2 \end{cases}$$