Un problema inverso di identificazione parametrica:

l'identificazione della conducibilità (termica, elettrica, idraulica, ...) in 1 dimensione spaziale

1- Il $\mathcal{S}$ dinamico

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \vartheta}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k \dfrac{\partial \vartheta}{\partial x}\right) + \tilde{f} \quad \text{in } Q \\
Q = D \times T \; ; \quad D = (x_1, x_2) \; ; \; T = \mathbb{R}^+ \\
\vartheta[x_1, t] = \vartheta_1[t] \quad @ \; x = x_1 \\
\vartheta[x_2, t] = \vartheta_2[t] \quad @ \; x = x_1 \\
\vartheta[x, 0] = \vartheta_0[x] \quad @ \; t = 0, \; x_1 \le x \le x_2 \\
y = H\,\vartheta[x, t]
\end{cases}
$$

2- Lo stato di equilibrio

<u>Hp</u> $k = a[\cdot]$ indipendente da t, ϑ
dipendente esplicitamente da x

$\vartheta[\cdot,\cdot] = z[\cdot]$ dipendente solo da x

$\tilde{f} = -f$ dipendente solo da x

Conseguenza:

V-07

$$
\begin{cases}
D = (x_1, x_2) \\
\dfrac{d}{dx}\left(a \dfrac{dz}{dx}\right) = f \quad \text{in } D \\
z[x_1] = z_1 \quad ; \quad z[x_2] = z_2
\end{cases}
$$

THM (esistenza ed unicità della soluzione)

Hp $a \in \mathcal{C}^1(\bar{D})$; $0 < a_L \le a[x] \le a_H \ \forall x \in \bar{D}$

$f \in \mathcal{C}^0(D)$

TH $\exists!\ z \in \mathcal{C}^2(D) \cap \mathcal{C}^0(\bar{D})$

che ha rappresentazione

$$z[x] = \int_{x_1}^{x} \frac{F}{a}\, d\eta + c_1 \int_{x_1}^{x} \frac{1}{a}\, d\eta + c_2$$

dove

$$c_2 = z_1$$

$$F := \int_{x_1}^{x} f[\xi]\, d\xi$$

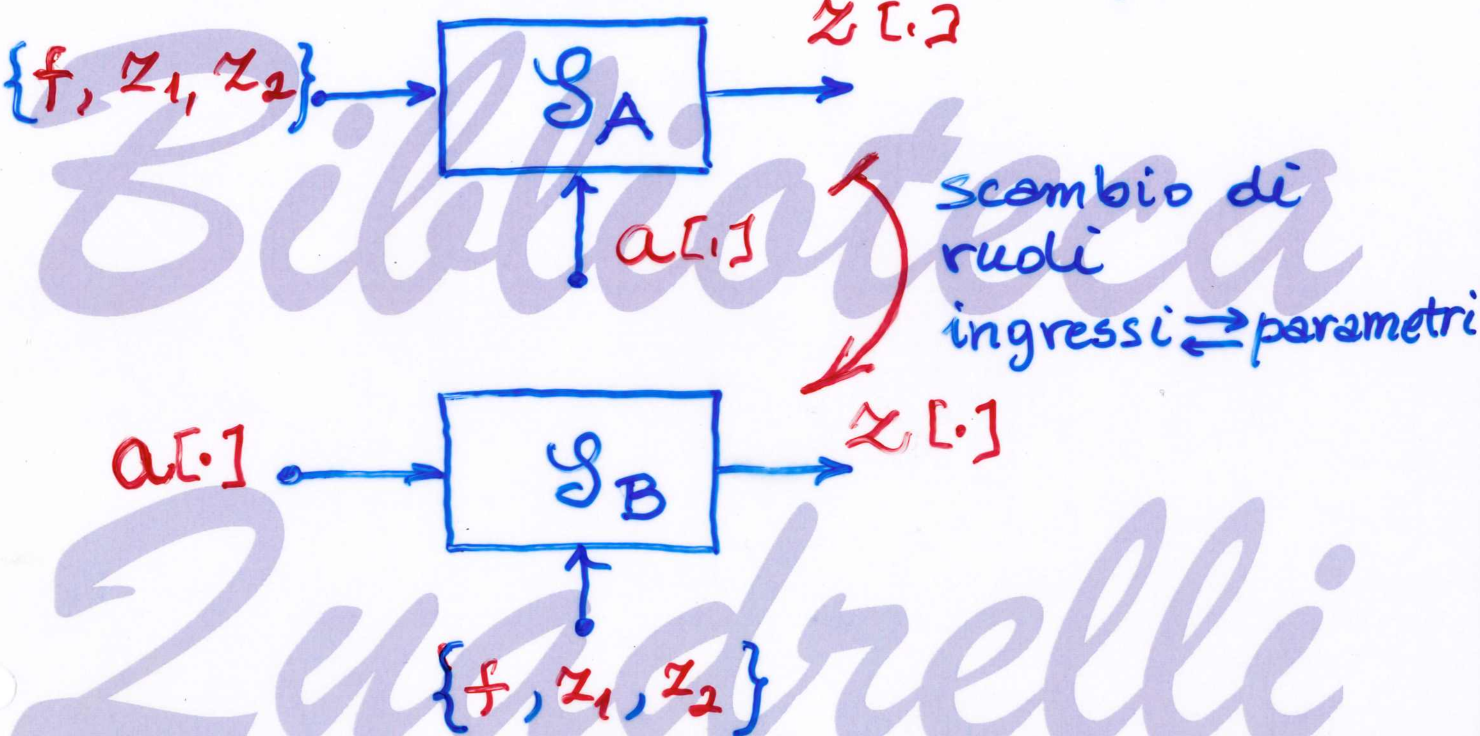
$$c_1 = \frac{z_2 - z_1 - \int_{x_1}^{x_2} \frac{F}{a}\, d\eta}{\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{a}\, d\eta}$$

Oss: **Esistenza** l'espressione di $z[\cdot]$ ha senso in conseguenza di $a \ge a_L$ (>0) $\forall x \in \bar{D}$; la $z[\cdot]$ verifica l'equazione in D e le condizioni ai limiti

Unicità l'espressione di $z[\cdot]$ NON contiene grandezze indeterminate

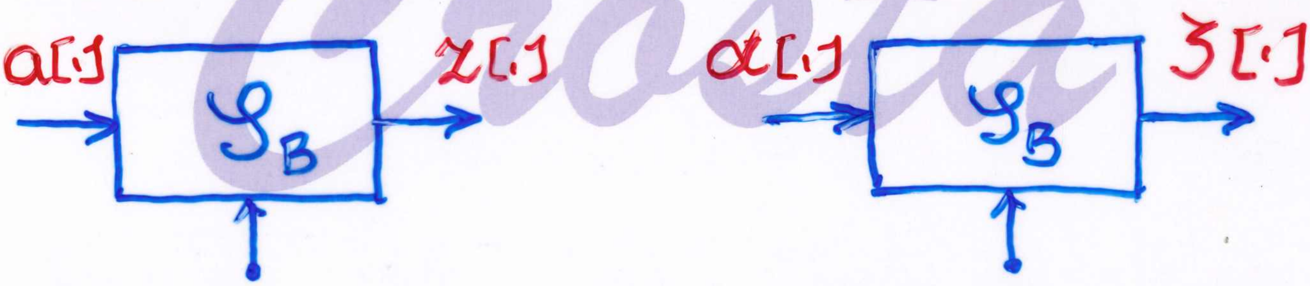
3- Analisi di "stabilità" (sensibilità ai disturbi, tipo di dipendenza dai parametri)

Obiettivo: stimare la "stabilità" di z rispetto ad a



PROBLEMA DI RIFERIMENTO

PROBLEMA VARIATO



V-09

DEF Se esistono norme $\|\cdot\|_Z$ e $\|\cdot\|_A$ ed una costante C_1 (indipendente da $a[\cdot]$, α, z, ζ) tale che

$$\|\zeta - z\|_Z \le C_1 \|\alpha - a\|_A$$

allora $z[\cdot]$ è **stabile** rispetto ad $a[\cdot]$

Esempio svolto

Notazione : $\dfrac{dz}{dx} \equiv z'$

Problema diretto :

$$D = (0, 1)$$

Problema di riferimento

$$\begin{cases} (a z')' = 0 \text{ in } D \\ z[0] = 1 \\ z[1] = 2 \end{cases}$$

Problema variato

$$\begin{cases} (\alpha_k \zeta_k')' = 0 \text{ in } D \\ \zeta_k[0] = 1 \\ \zeta_k[1] = 2 \end{cases}$$

dove

$a[x] = 1, \ \forall x \in \bar{D}$

$$\alpha_k[x] = \frac{1}{1 - \varepsilon \sin 2\pi k x}$$

$0 \leq \varepsilon < 1; \quad k \geq 1$, intero

soluzione

$z = 1 + x$

$$\zeta_k = 1 + x + \varepsilon \frac{\cos 2\pi k x}{2\pi k} - \frac{\varepsilon}{2\pi k}$$

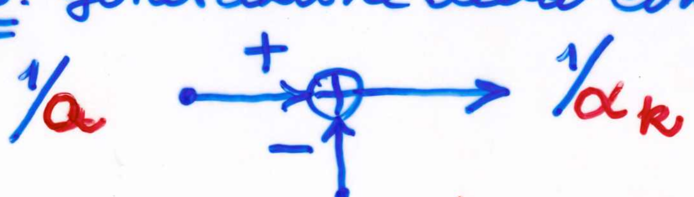
(infatti :

$(z' = 1;$ $\quad \zeta_k' = 1 - \varepsilon \sin 2\pi k x;$

$z'' = 0 \quad)$ $\quad \zeta_k'' = -2\pi \varepsilon k \cos 2\pi k x \,)$

V-10

<u>OSS.</u> generazione della conducibilità variata



ampiezza $\quad \varepsilon \sin 2\pi k x \quad$ frequenza spaziale

PROP. (stabilità di $z[\cdot]$ rispetto ad $a[\cdot]$)

Siano $\mathcal{Z} = \mathcal{C}^2(\bar{D})$, $\mathcal{P} = \mathcal{C}^1(\bar{D})$, allora $\exists\ c_2 > 0$, indipendente da ε, k, tale che

$$\| \zeta_k - z \|_{\mathcal{Z}} < c_2 \| \alpha_k - a \|_{\mathcal{P}}$$

Dim Le norme "naturali" di $\mathcal{C}^2(\bar{D})$ e $\mathcal{C}^1(\bar{D})$ sono quelle della convergenza uniforme delle funzioni assieme alle rispettive derivate. Quindi

$$\| \zeta_k - z \|_{\mathcal{Z}} := \max_{\bar{D}} |\zeta_k - z| + \max_{\bar{D}} |\zeta_k' - z'| + \max_{\bar{D}} |\zeta_k'' - z''|$$

$$\| \alpha_k - a \|_{\mathcal{P}} := \max_{\bar{D}} |\alpha_k - a| + \max_{\bar{D}} |\alpha_k' - a'|.$$

Dalle proprietà di z, ζ_k, a, α_k si ottengono:

$$|\zeta_k - z| = \left| \frac{\cos[2\pi k x] - 1}{2\pi k} \right| \varepsilon \le \frac{2\varepsilon}{2\pi k} = \frac{\varepsilon}{k\pi} \qquad (1)$$

$$|\zeta_k' - z'| = |-\varepsilon \sin[2\pi k x]| \le \varepsilon \qquad (2)$$

$$|\zeta_k'' - z''| = 2\pi k \varepsilon\, |\cos[2\pi k x]| \le 2\pi k \varepsilon \quad \text{in } \bar{D} \qquad (3)$$

$$|\alpha_k - a| = \left| \frac{\sin[2\pi k x]}{1 - \varepsilon \sin[2\pi k x]} \right| \varepsilon \le \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \qquad (4)$$

$$|\alpha_k' - a'| = \left| \frac{2\pi k \varepsilon \cos[2\pi k x]}{(1 - \varepsilon \sin[2\pi k x])^2} \right| \le \frac{2\pi k \varepsilon}{(1 - \varepsilon)^2} \quad \text{in } \bar{D} \qquad (5)$$

ora si cerca c_2 tale che $\{(1) + (2) + (3)\} \le c_2 \{(4) + (5)\}$.

$$\left(\frac{\varepsilon}{\pi k} + \varepsilon + 2\pi k \varepsilon \right) \le c_2 \left(\frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} + \frac{2\pi k \varepsilon}{(1 - \varepsilon)^2} \right)$$

dividendo per ε:

$$\left(1/\pi k + 1 + 2\pi k \right) \le c_2 \left(\frac{1}{1 - \varepsilon} + \frac{2\pi k}{(1 - \varepsilon)^2} \right)$$

risolvendo rispetto a c_2

$$c_2 \ge \frac{1 + \pi k + 2\pi^2 k^2}{1 - \varepsilon + 2\pi k} \cdot \frac{(1 - \varepsilon)^2}{\pi k} := F$$

Si cerca ora di maggiorare F. Si trova

$$F \le \frac{1 + \pi k + 2\pi^2 k^2}{2\pi k} \cdot \frac{1}{\pi k} < \frac{1 + \pi k + 2\pi^2 k^2}{2\pi^2 k^2} = 1 + \frac{1 + \pi k}{2\pi^2 k^2}$$

Si verifica facilmente la disuguaglianza (*)

$$\frac{1 + \pi k}{2\pi^2 k^2} < \frac{1 + \pi}{2\pi^2} \quad \text{per } k > 1, \text{ quindi basta scegliere } c_2 > 1 + \frac{1 + \pi}{2\pi^2}$$

$\square$

(*) studiando il segno di $(1 + \pi) k^2 - \pi k - 1$ che è > 0 per $k > 1$.

OSSERVAZIONI

1- (tipo di stabilità di $x[\cdot]$ rispetto ad $a[\cdot]$)

2- (convergenza di $\zeta_k \to z$)

$$\lim_{k\to+\infty} |\zeta_k - z| = 0, \forall x, \forall \varepsilon \in [0,1)$$

3- (convergenza di α_k ?)

$$\lim_{k\to+\infty} \alpha_k[x] : \neg\exists$$

$$\lim_{k\to+\infty}\int_0^1 \frac{1}{\alpha_k}\,dx = 1$$

perché $\int_0^1 \frac{1}{\alpha_k}\,dx = \int_0^1 (1-\varepsilon\sin 2\pi k x)\,dx =$

$$= 1 + \frac{\varepsilon}{2\pi k}\cos 2\pi k x\Big|_0^1$$

V-13