GIOVANNI FRANCO CROSTA Metodi Matematici per le Scienze Ambientali

Il teorema di POINCARÉ-BENDIXSON (*)

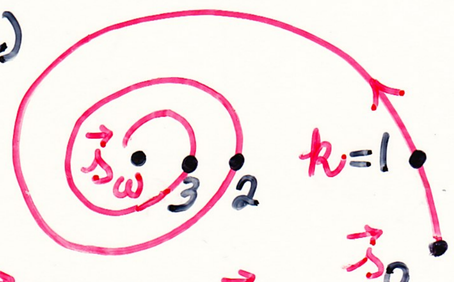
DEF. (ω-limite) Sia $\mathcal{S}$ regolare, autonomo; sia $\vec{s}_0 \in S$ lo stato iniziale. Si dice ω-limite di $\vec{s}_0$ e si denota con $\omega[\vec{s}_0]$ l'insieme di stati $\{\vec{s}_\omega[\vec{s}_0]\} \subset S$ che soddisfano

1) $\exists$ una successione $\{t_k \mid k = 1, 2, 3, \dots\} \subset T$ con $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = \infty$

2) $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi[t_k, 0, \vec{s}_0] =_S \vec{s}_\omega[\vec{s}_0] \subset \omega[\vec{s}_0]$.

ESEMPI

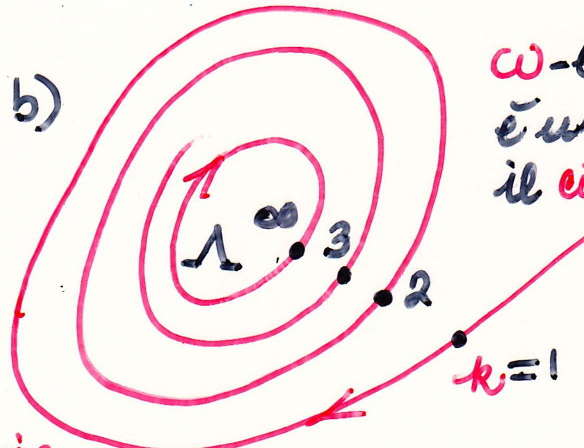
a)



$\vec{s}[t_k] \to \vec{s}_\omega$

ω-limite $\equiv$ limite ordinario

b)



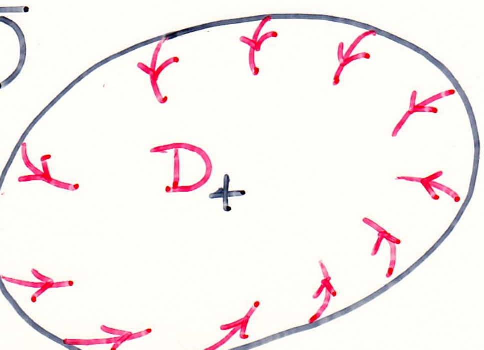
ω-limite è un insieme, il ciclo-limite Λ

OSS. (lampada stroboscopica)

DEF. (invariante positivo)

Sia $\mathcal{S}$ regolare, autonomo, con $\dim[S] = N$. Un dominio $D_+ \subset S$ è detto invariante positivo (sotto la azione del campo vettoriale che definisce $\mathcal{S}$) qualora $\forall \vec{s}_0 \in D_+$ anche $\varphi[t, 0, \vec{s}_0] \in D_+ \ \forall t \geq 0$.

ESEMPIO
($\dim[S] = 2$)



(*) HENRI POINCARÉ [~1881-1882]

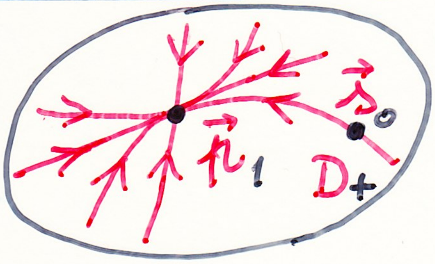
IVAR OTTO BENDIXSON (1861-1935) [~1901]

THM. (POINCARÉ-BENDIXSON)

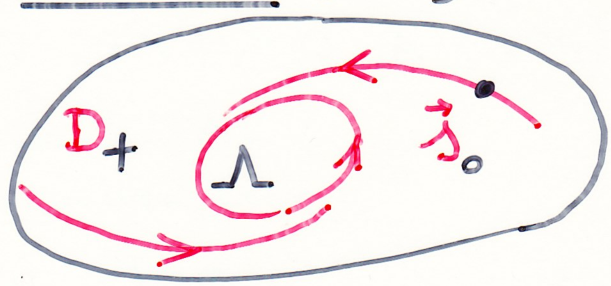
Sia $\mathcal{S}$ regolare, autonomo, con $\dim[\mathcal{S}] = 2$. Sia D_+ un invariante positivo che contiene, al più, un numero finito di stati d'equilibrio. Allora, fissato $\vec{s}_0 \in D_+$ si verificano i tre casi, che sono mutuamente esclusivi:

1) $\omega[\vec{s}_0]$ è un ordinario stato d'equilibrio, isolato, asintoticamente stabile;
2) $\omega[\vec{s}_0]$ è un'orbita chiusa priva di stati di equilibrio;
3) $\omega[\vec{s}_0]$ è uno stato d'equilibrio, isolato, instabile, $\vec{p}_1$; a sua volta $\vec{p}_1$ è α-limite di orbite $\gamma_{1k} \subset D_+$; tali orbite hanno, come ω-limite, o $\vec{p}_1$ stesso, o altri stati d'equilibrio distinti, $\vec{p}_k$, $k = 2, 3$.

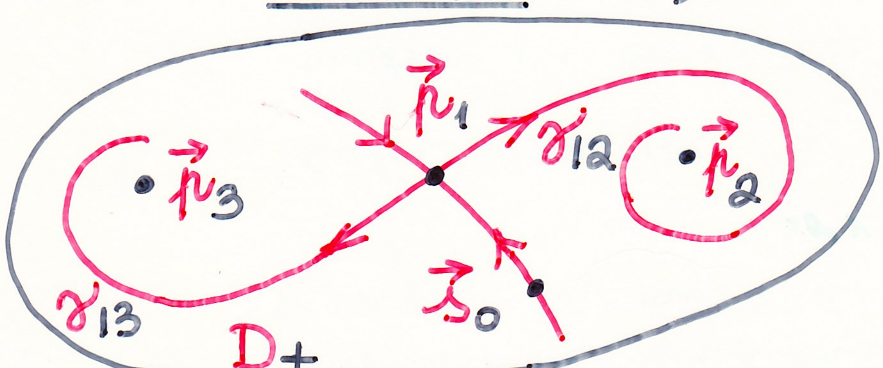
ESEMPIO di 1)



ESEMPIO di 2)



ESEMPIO di 3)



Oss. Il THM non vuole (né può) precisare completamente la funzione (a valori d'insieme)

$$\omega : D_+ \to D_+$$
$$\vec{s}_0 \mapsto \omega[\vec{s}_0]$$

2013 Set 06

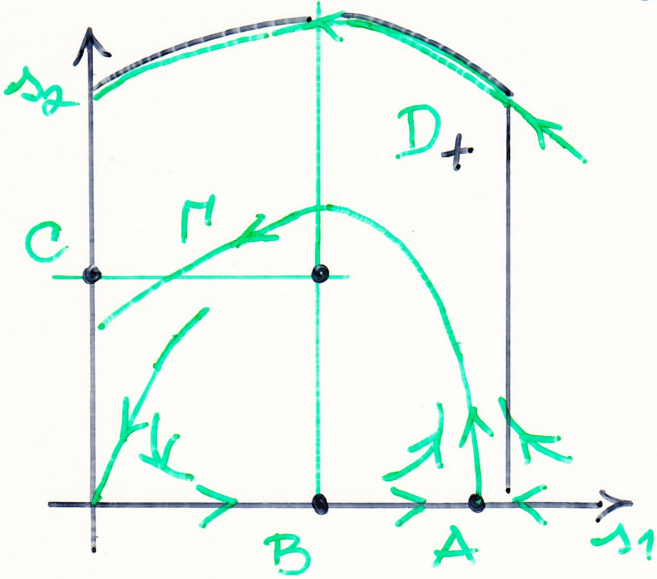
Giovanni Franco Crosta Metodi Matematici per le Scienze Ambientali

При $B<A$, " поэтому возможны в существенном три случая: интересующая нас сепаратриса (Γ)

α) пересекает ось s_2;

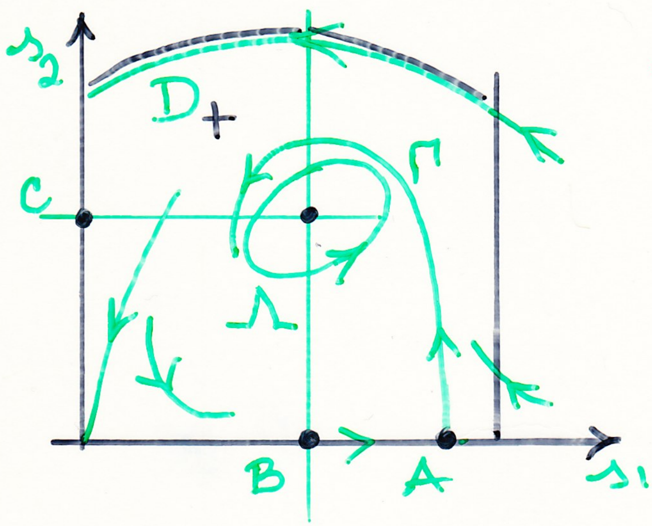
β) наматывается на предельный цикл;

γ) входит в точку $\{B, C\}$.



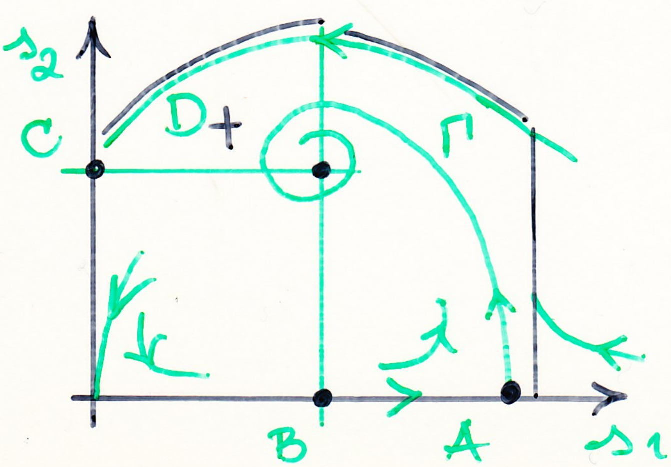
α)

$\mathcal{S}(4,+)$



β)

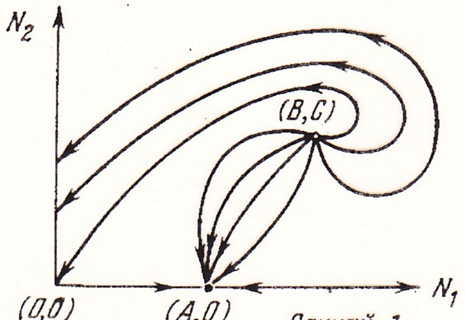
$\mathcal{S}(4,+)$ или $\mathcal{S}(4,0)$



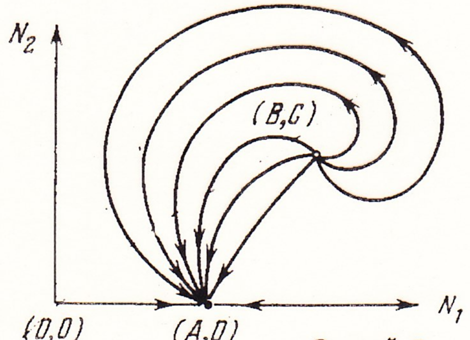
γ)

$\mathcal{S}(4,+)$ или $\mathcal{S}(4,0)$

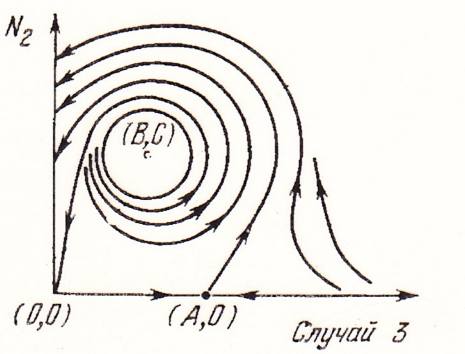
2013Дек07



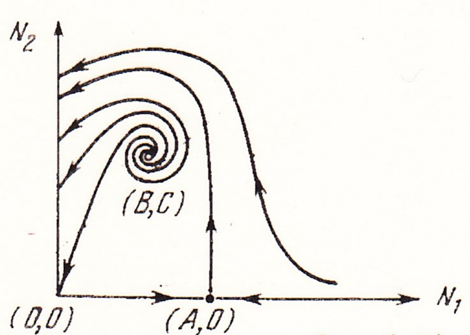
Случай 1



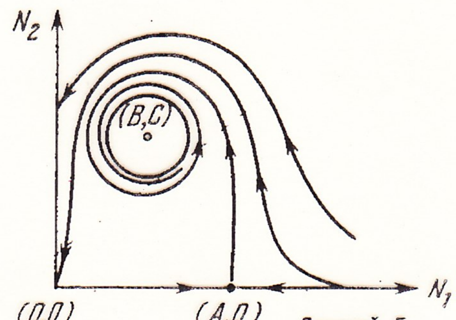
Случай 2



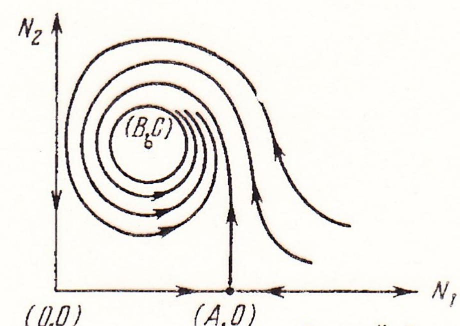
Случай 3



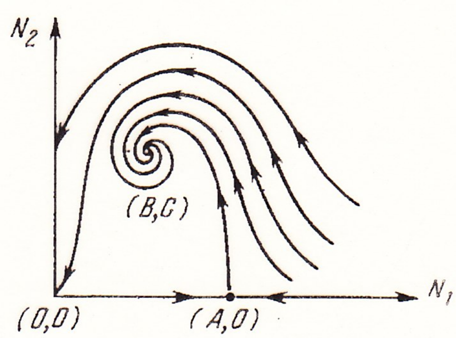
Случай 4б

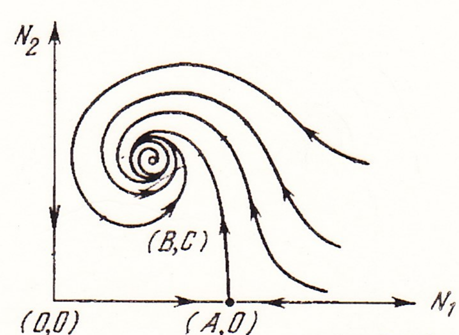


Случай 5



Случай 6





Случай В6

2013 Dек. 09